

각운동량

이충기

December 30, 2010

1 회전운동

일상에서 회전운동은 흔하게 보인다. 지구의 자전이나, 달이 지구 주위를 도는 것, 차나 수레의 바퀴가 구르는 것 등, 회전운동에는 헤아릴 수 없이 많은 예가 있다. 가장 단순한 회전운동인 등속 원운동을 살펴 보자. 어떤 물체가 일정한 (선)속력 v 로 반지름 R 인 원궤도를 그리며 회전하고 있다. 이 물체의 속력(속도의 크기)은 일정하지만, 운동 방향은 계속 변하고 있으므로 등속 원운동은 가속 운동임에 주의해야 한다. 등속 원운동의 경우 가속도의 방향은 항상 원의 중심을 향하고 그 크기는 $a = v^2/R$ 인 것은 잘 알려진 사실이다.

등속 원운동의 경우, 궤도 반지름과 선속력은 시간에 대해 일정하기 때문에, 시각 t 에서 물체의 위치는 어떤 기준선으로 부터 켜 각도만 가지고 표시할 수 있다. 이 각을 시간의 함수로 표현하여 $\theta(t)$ 라고 하면, 부채꼴의 호의 길이를 구하는 공식으로부터 $vt = R\theta(t)$ 임을 알 수 있다(그림 1). 양변을 t 로 미분해 보면 $d\theta/dt = v/R$ 이 되므로 각 θ 의 시간에 대한 변화율은 선속력을 궤도 반지름으로 나눈 것이다. 회전운동을 다루기 위해선 (선)속력 대신 이와 같은 각속력(angular speed) $\omega = d\theta/dt$ 를 쓰는 것이 편리하다. 속력(speed)은 방향을 가진 양(벡터량)인 속도(velocity)의 크기를 말하는데, 각속력을 크기로 가지는 각속도(angular velocity)란 벡터량도 생각해 볼 수 있다. 각속도는 회전을 나타내는 벡터이므로 그 방향은 회전축에 해당하는 방향으로 정한다(오른 손으로 회전축을 감쌀때 엄지 손가락이 가리키는

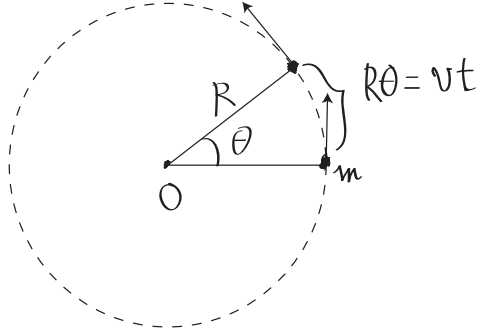


Figure 1: 등속 원운동

방향이다).

2 돌림힘(torque)

돌림힘은 말 그대로 물체의 회전운동에 관여하는 물리적 작용을 나타내는 물리량이다. 일상에서 쉽게 볼 수 있는 시계추의 운동을 예로 들어 보자. 추는 길고 딱딱한 한 쪽 끝이 고정된 막대에 달려 있다. 편의상 추를 매달고 있는 막대의 질량은 무시하고, 추의 질량만을 생각하자. 또 추는 평면 상에서만 운동한다고 가정하자. 만약 추가 높이가 가장 낮은 위치인 정중앙에 정지하고 있다면, (당연하게도) 시계추는 아무리 기다려도 저절로 움직이지는 않는다. 그러나 시계추를 오른 쪽으로 움직여서 위로 약간 들어 올렸다가 놓으면 시계추는 원호를 그리는 회전운동을 한다(그림 2). 속력은 매순간 변하고, 완전한 원궤도를 그리지도 않으며(운동궤적은 원호이다), 일정 주기로 회전 방향도 바뀌므로 앞에서 예로 든 등속 원운동과는 많이 다르다. 하지만 고정점을 중심으로 시계추는 회전운동을 한다고 볼 수 있다. 이 회전을 일으키는 것은 분명하게 중력이지만, 추의 초기 위치가 최저점에 있었다면 중력이 작용함에도 회전 운동이 일어나지 않는다.

다음과 같이 돌림힘을 정의하면, 위의 상황이 잘 설명됨을 알 수 있다.

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \quad (1)$$

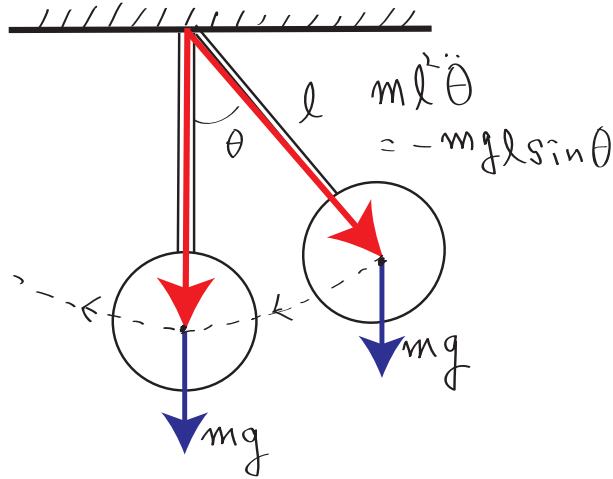


Figure 2: 시계추의 운동

\vec{r} 은 회전 중심으로부터 힘의 작용점까지를 가르는 벡터다. 위의 예에서 보면 추의 질량을 m 이라 할 때, $F = mg$ 이고 힘의 방향은 항상 아래 쪽이다(그림 2). 시계추가 처음에 중앙에 정지해 있다면 \vec{r} 과 \vec{F} 는 평행하므로 벡터곱의 성질에 의해 $\vec{\tau} = 0$ 이다. 이 때는 회전 운동이 일어나지 않는다. 그러나 시계추가 오른쪽으로 이동하면 중력으로 인한 돌림힘이 생겨서, 시계방향으로 회전하게 된다. 이 때 돌림힘의 방향은 지면을 뚫고 들어가는 방향이다.

이처럼 정지해 있는 물체를 회전시키려면 돌림힘이 필요하지만, 회전 운동 자체를 위해 반드시 돌림힘이 필요한 건 아니다. 이것은 힘을 받지 않는 물체가 정지해 있을 수도 있지만, 그 물체가 0이 아닌 운동량을 가지는 등속 직선운동을 하고 있을 수도 있는 것을 연상하면 이해할 수 있다. 물체에 작용하는 힘은 물체의 운동량을 변화시킨다. 그렇다면 돌림힘은 무엇을 변화시킬까?

3 각운동량(angular momentum)

뉴턴의 힘과 운동의 법칙 중 제 2 법칙은 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2)$$

여기서 \vec{p} 는 (선)운동량(linear momentum)이라고 부르는 양이다. 즉 힘은 운동량의 시간에 대한 변화율이다. 그렇다면 회전 운동의 돌림힘에 대응하는 각운동량도 있지 않을까? 각운동량을 다음과 같이 정의해보자.

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \quad (3)$$

여기서 \vec{r} 은 우리가 정한 원점(대개는 회전축에 대응하는 점으로 선택)에 대한 물체의 위치 벡터이다. 이것의 시간에 대한 미분을 구해보면

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \end{aligned} \quad (4)$$

이 된다. 따라서 돌림힘은 위에서 정의된 각운동량의 시간에 대한 변화율과 같음을 알 수 있다. 돌림힘이 없다면 각운동량은 시간에 대해 변하지 않는다. 즉 각운동량은 보존된다. “돌림힘이 없으면 각운동량은 보존된다”는 물리가 적용되는 대표적인 예는 태양 주위를 도는 행성의 운동이다. 태양의 위치를 좌표축의 원점으로 정해 보자. 태양의 중력은 행성을 자기 쪽으로 잡아 당기므로, 태양이 행성에 작용하는 힘은 태양과 행성을 잇는 선분에 평행한 방향이 되서, 돌림힘은 0이다. 따라서 각운동량이 보존되는데, 이것은 케플러가 발견한 면적속도 일정의 법칙과 같은 말이다.

각운동량이 보존된다는 것은 각운동량의 크기 뿐만이 아니라 방향도 바뀌지 않는다는 뜻이므로, 행성의 궤도는 각운동량의 방향에 수직인 평면 위에 놓인다. 행성의 질량을 m 이라 하고, 태양의 질량을 M , 중력상수를 G 라 할 때 태양으로부터 거리가 r 만큼 떨어진 곳에 위치한 이 행성의 에너지는 다음과 같다.¹

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad (5)$$

그림 3의 (b)로부터 $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\omega^2$ 임을 알 수 있는데, 여기서 $\dot{r} = dr/dt$, $\omega =$

¹태양도 행성의 중력을 받아 운동을 하지만, 태양의 질량이 행성보다 굉장히 크면 태양은 정지하고 있다고 해도 무방하다. 정확하게 하려면 환산질량(reduced mass) 개념을 사용해야 한다.

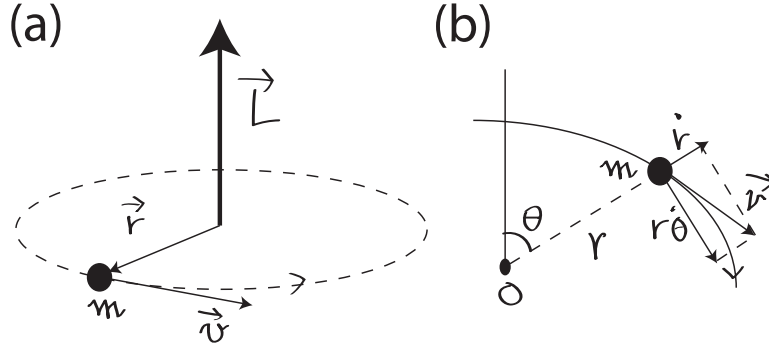


Figure 3: 회전운동과 각운동량 (a) 등속 원운동의 각운동량은 간단하게 구할 수 있다. 각운동량의 정의로부터 방향은 원궤도가 놓여있는 평면에 위로 수직인 방향이 되고 그 크기는 $L = rps \sin \frac{\pi}{2} = rmv = rmr\omega = mr^2\omega$ 이다. (b) 회전운동의 궤도가 원이 아니어도 각운동량은 $L = mr^2\omega$ 로 동일하다. 그림의 $\dot{\theta}$ 는 뉴턴의 미분표기법으로 각 θ 에 대한 시간 미분, 즉 $\dot{\theta} = \omega = d\theta/dt$ 이다. 각운동량의 표현이 같은 이유는 속도의 지름 방향 성분인 \dot{r} 은 각운동량에 기여하지 않기 때문이다. 그러나 이제는 r 이 시간에 따라 계속 변하기 때문에, 각운동량이 시간에 대해 상수가 되기 위해선 각속도 $\dot{\theta}$ 도 이에 맞춰 변해야 한다.

$\dot{\theta} = d\theta/dt$ 이다. 이것은 평면위에서 움직이는 행성의 속도는 지름방향 속도와 각방향 속도로 분해 될 수 있다는 사실로부터 쉽게 유도할 수 있다.² 위 식을 다시 쓰면,

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) - \frac{GMm}{r} \quad (6)$$

이다. 각운동량이 보존되므로, $L = mr^2\omega$ 을 이용하여 ω 를 소거할 수 있다.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad (7)$$

이것을 약간 변형하면

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - V_{eff}(r) \quad (8)$$

를 얻는데, 에너지 보존법칙에 의해 E 는 위치와 시간에 무관한 상수이다. $V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$ 이다. 식 (8)의 왼쪽항 $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ 는 항상 0보다 크거나

²이것은 직교좌표를 극좌표로 표현해 보면 금방 알 수 있다. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 이므로 $\dot{x} = -r\dot{\theta} \sin \theta + \dot{r} \cos \theta$, $\dot{y} = r\dot{\theta} \cos \theta + \dot{r} \sin \theta$ 이다. $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ 을 계산해 보면 된다.

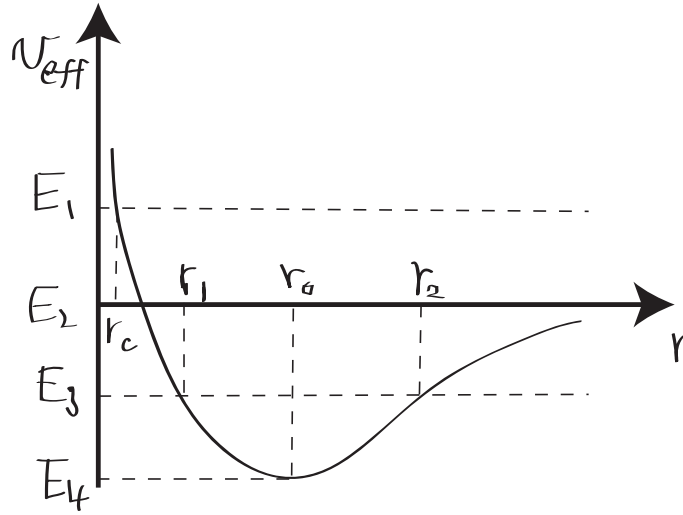


Figure 4: **에너지에 따른 행성의 다양한 궤도** 행성의 역학적 에너지에 따라 궤도가 결정된다. 총에너지는 $V_{eff}(r)$ 보다 크거나 같아야 한다. $E = E_1$: 태양과 가장 가까운 거리가 r_c 인 쌍곡선 궤도가 된다. $E = E_2 = 0$: 곡선과 r 축과의 교점에 해당하는 거리가 태양과 가장 가까운 거리가 되는 포물선 궤도가 된다. $E = E_3$: 태양에 가장 가까운 거리가 r_1 이고 가장 먼 거리가 r_2 인 타원궤도가 된다. $E = E_4$: 반지름 r_0 인 원궤도가 된다.

따라서, $E \geq V_{eff}(r)$ 이어야만 물리적으로 의미있는 궤도가 존재한다. 따라서 $V_{eff}(r)$ 을 그려보면 행성의 에너지에 대해 행성의 궤도에 대한 성질을 알 수 있다(그림 4 참조).³

물리학에서 각운동량은 매우 중요한 개념인데, 고전적인 회전운동을 설명하기 위해서 뿐만이 아니라 양자론으로 이 개념을 확장하면 고전적으로는 대응물이 없는 새로운 것들이 나타나기 때문이다.

³원궤도를 제외하곤, 이것으로 에너지에 따라 행성의 궤도가 원뿔 곡선들 중 하나가 되는 것을 보일 수는 없다. 하지만 행성의 궤도가 태양 중력에 속박된 궤도(원, 타원)가 될 것인가, 아니면 속박되지 않은 궤도(포물선, 쌍곡선)가 될 것인가는 알 수 있다. 정확한 궤도를 구하려면 운동방정식을 실제로 풀어야 할 것이다.