

# 양자물리학 (1회)

이충기 2010.9.11

# 파동 (Waves)

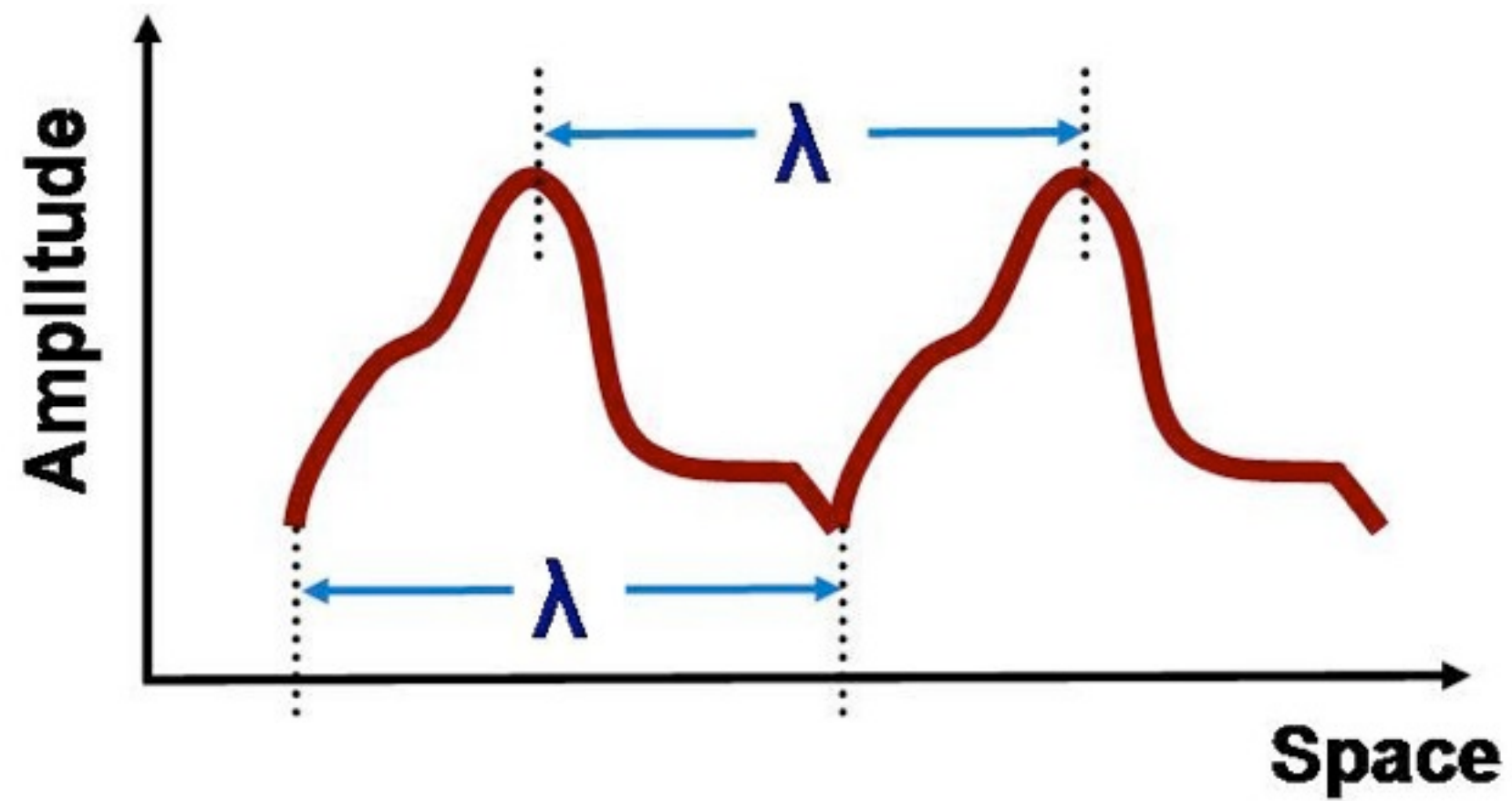
파동은 시공간을 진행하는 요동이다.

역학적 파동 - 매질의 탄성에 의해 생김

전자기적 파동 - 전기와 자기의 상호 유도에 의해 생김 (매질 필요없음)

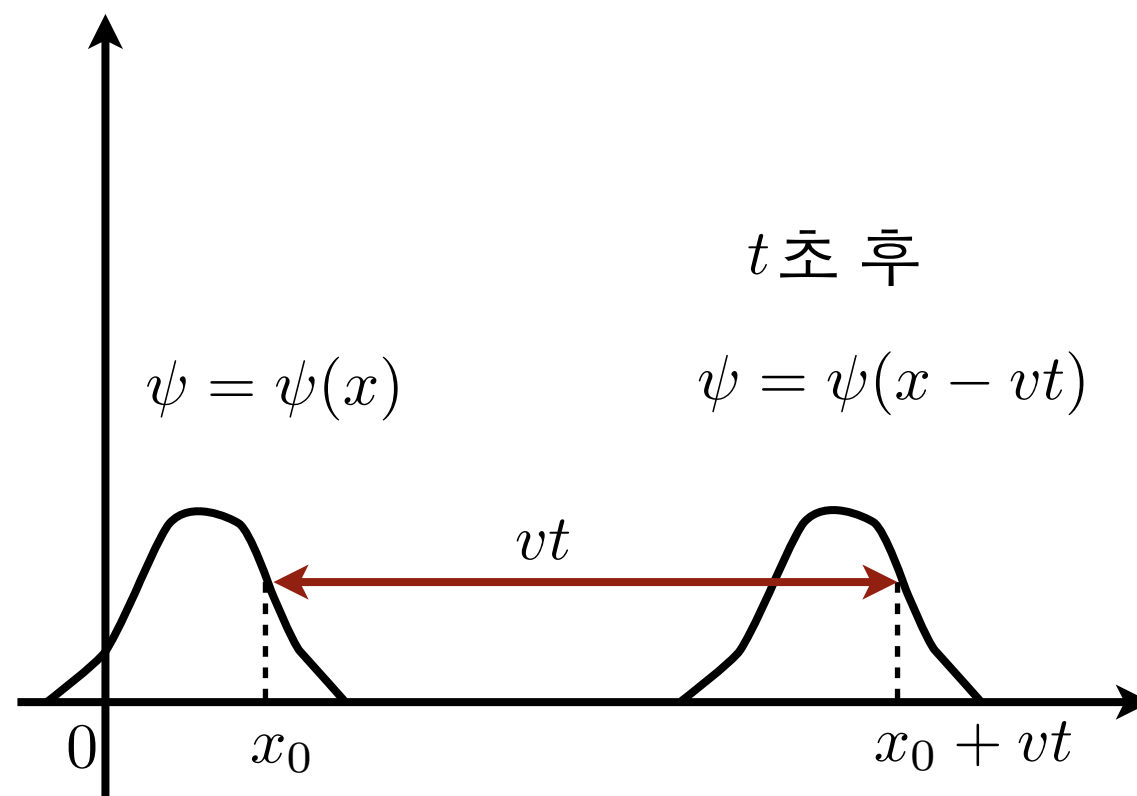
물질파동 - 양자역학의 파동 (확률파동)

$$\psi = \psi(x, t)$$



# 파동 방정식 (wave equations)

$$\psi = \psi(x, t) = \psi(x - vt)$$



# 파동방정식

$$\psi = \psi(x - vt)$$

$$y = x - vt \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -v$$

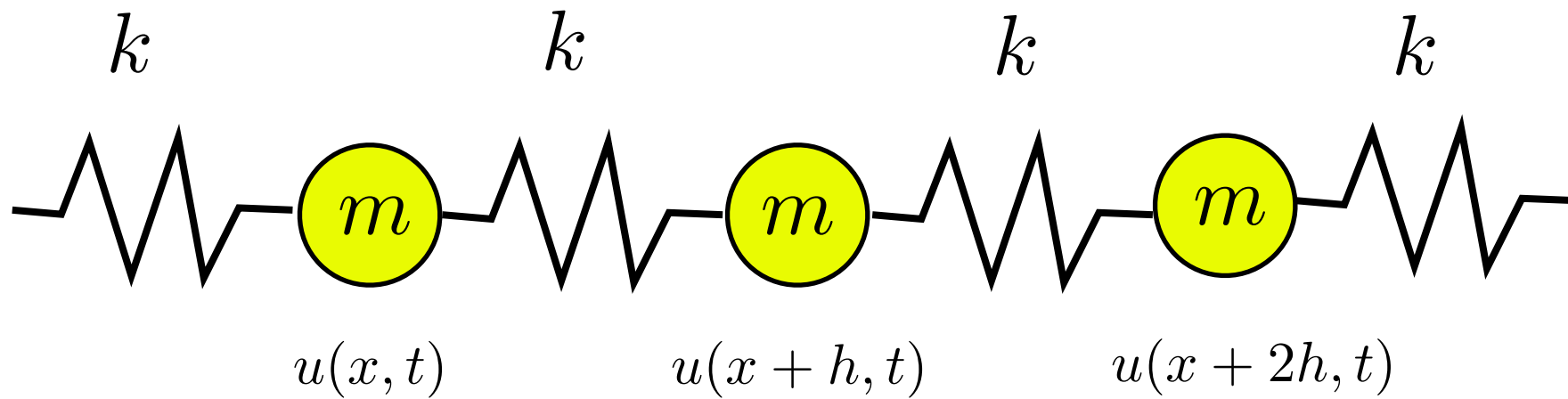
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( -v \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\} \frac{\partial y}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$



$$F = ma = m \frac{\partial^2 u(x + h, t)}{\partial t^2} = -k\{u(x + h, t) - u(x, t)\} - k\{u(x + h, t) - u(x + 2h, t)\}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u(x + h, t)}{\partial t^2} = \frac{kh^2}{m} \frac{u(x + 2h, t) - 2u(x + h, t) + u(x, t)}{h^2}$$

$$M = Nh$$

$$L = Nh$$

$$K = k/N$$

with  $h \rightarrow 0$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

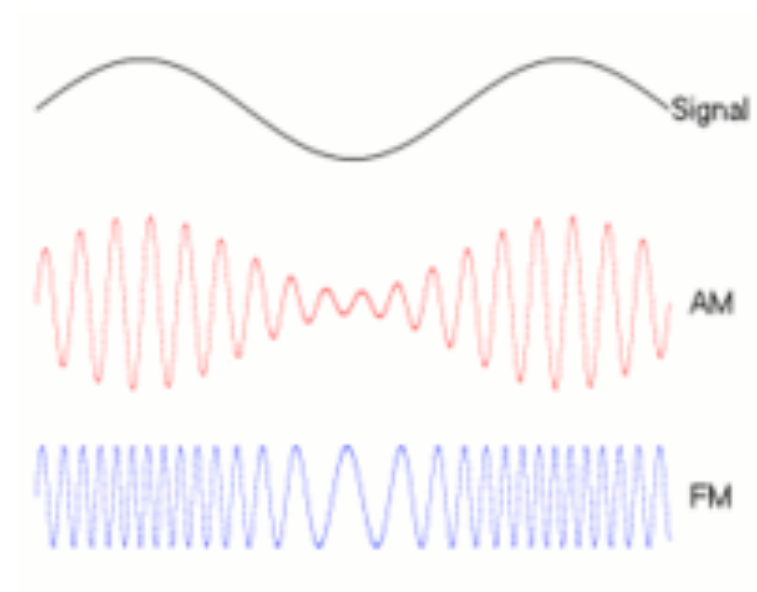
$\nearrow v^2$   
 $KL^2/M$

# 역학적 파동의 속력

$$v = \sqrt{\frac{\text{매질의 탄성성질}}{\text{매질의 관성성질}}}$$

# 파열(wave train)

같은 모양이 반복되는 파동의 형태



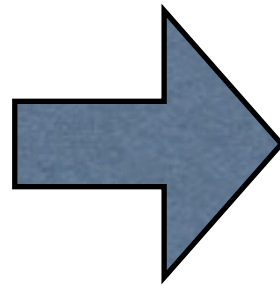


# 무한 파열(infinite wave train)

$$\psi(x, t) = A \cos(k(x - vt))$$

$$\psi(x + \lambda, t) = \psi(x, t)$$

$$\psi(x, t + T) = \psi(x, t)$$



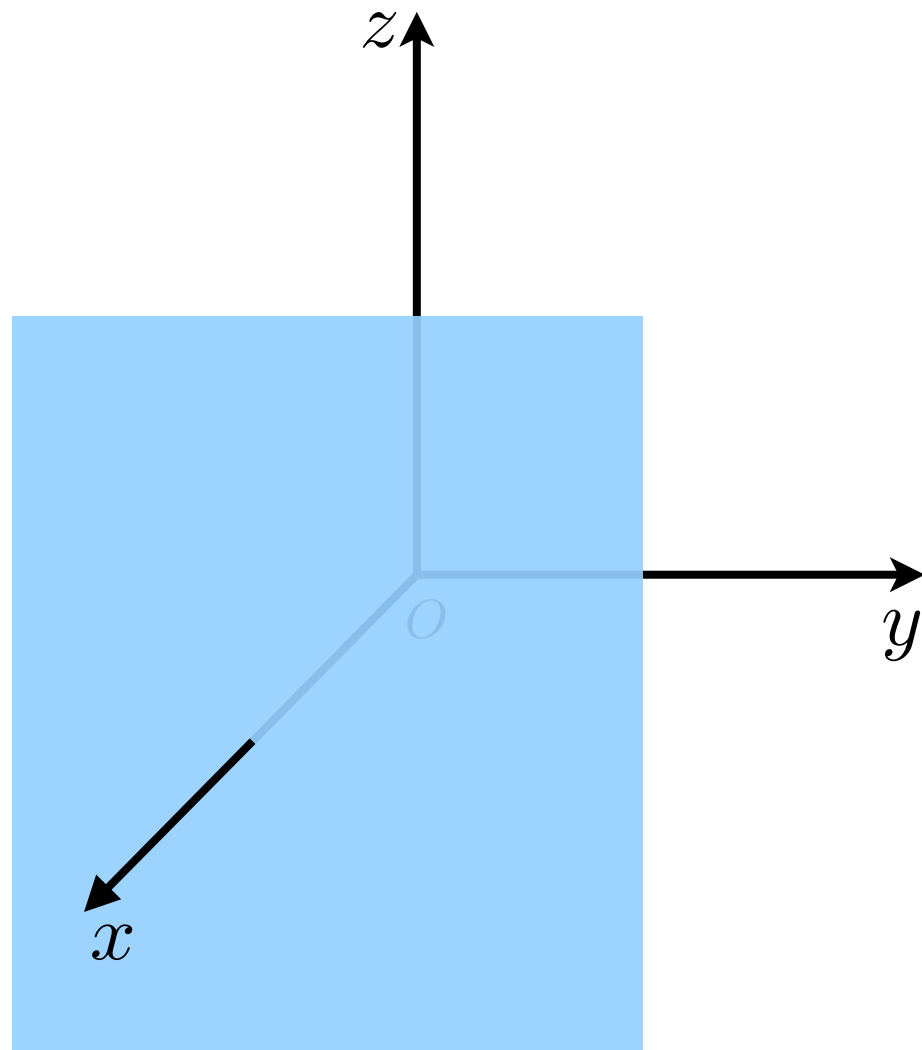
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

파수(wave number)

$$kv = \frac{2\pi}{T} = \omega$$

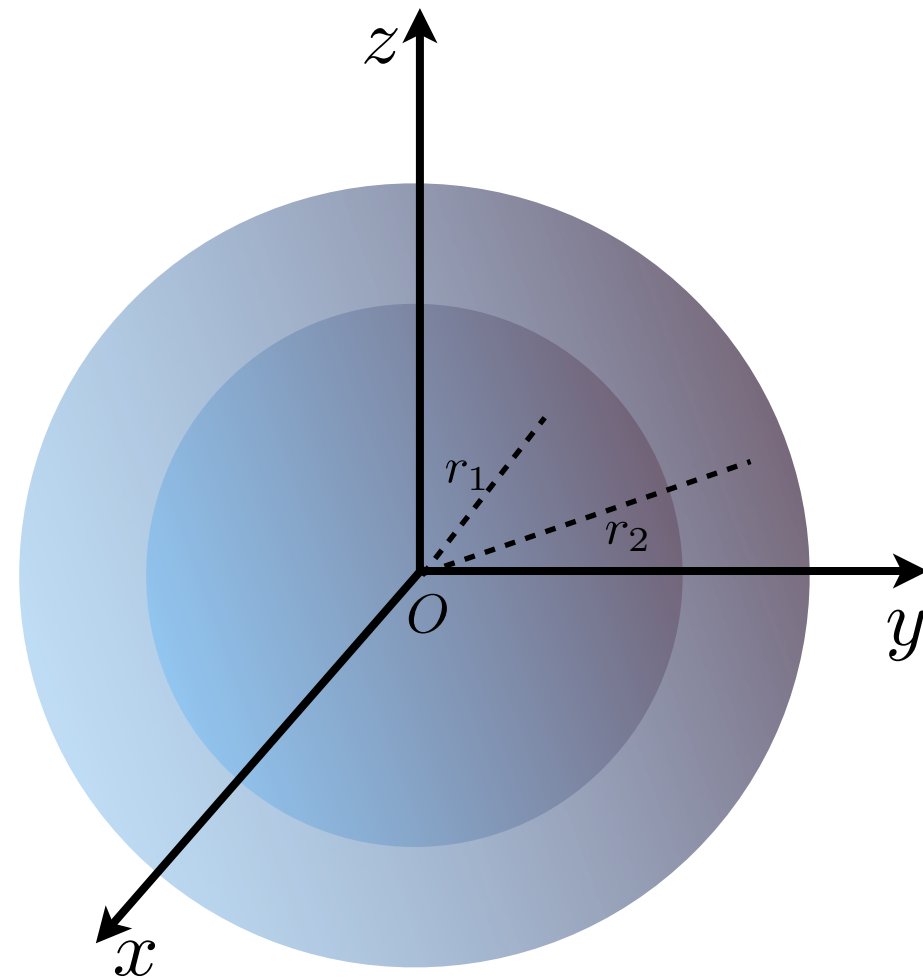
각주파수(angular frequency)

# 평면파와 구면파



$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

시간을 고정하고 보면,  $x$ 가 일정한 평면상의 모든 점에서 위상이 같다.- 평면파

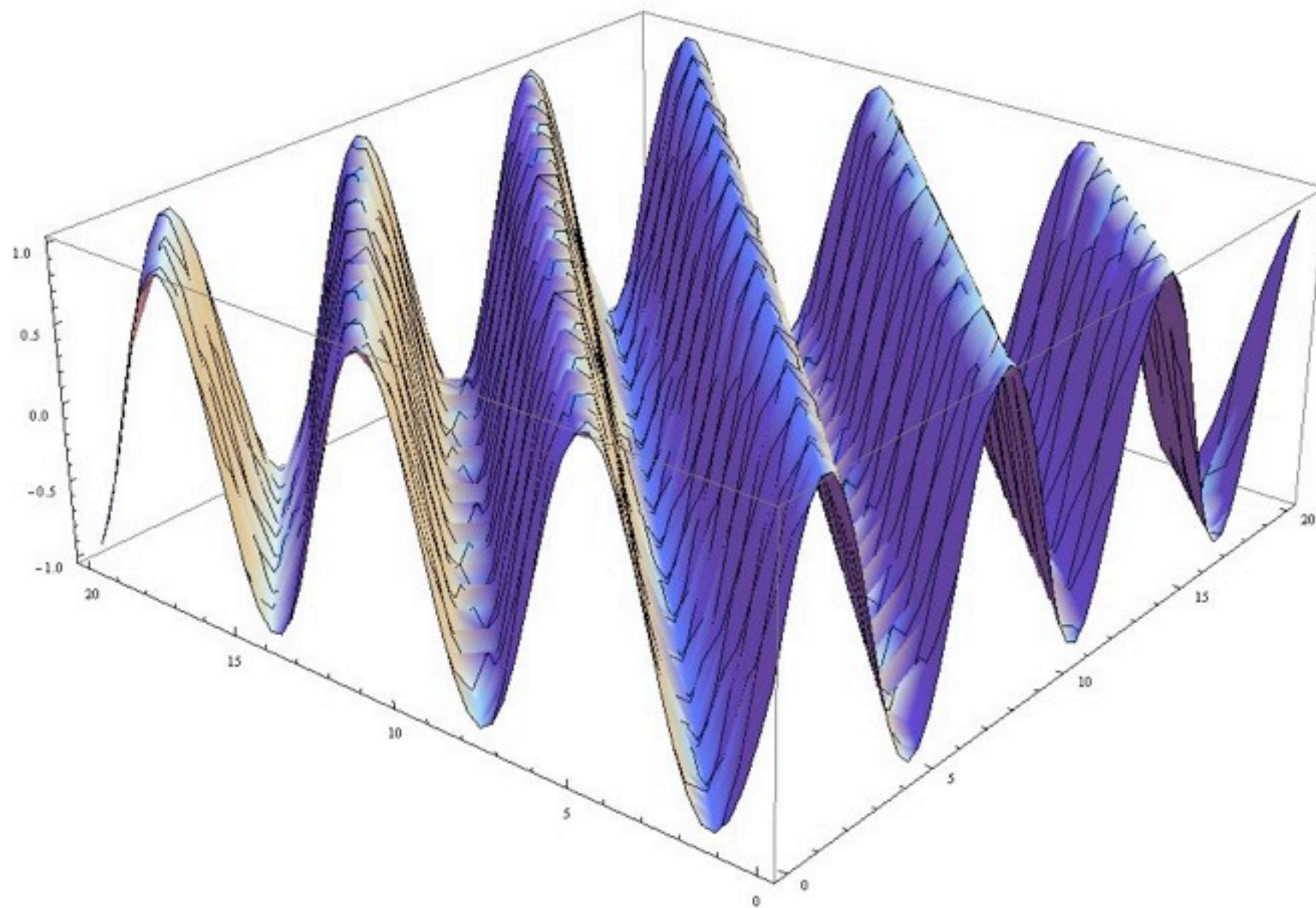


$$\psi(x, t) = A \frac{\sin(kr - \omega t)}{r}$$

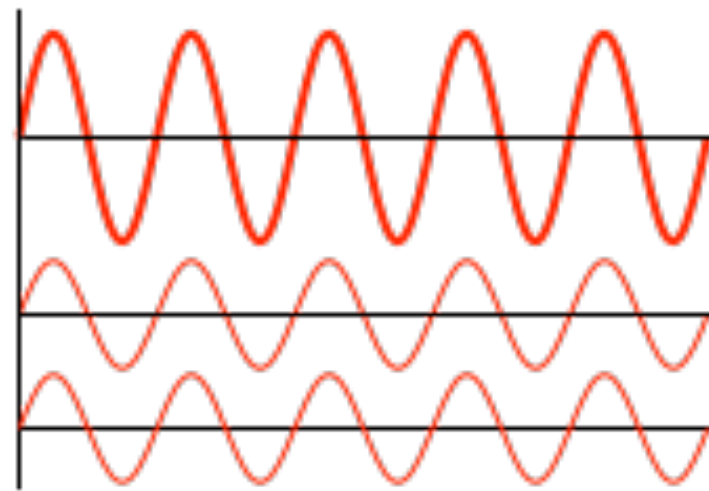
시간을 고정하고 보면,  $r$ 이 일정한 구면상의 모든 점에서 위상이 같다.- 구면파

진폭의  $1/r$  의존성은 왜 생길까?

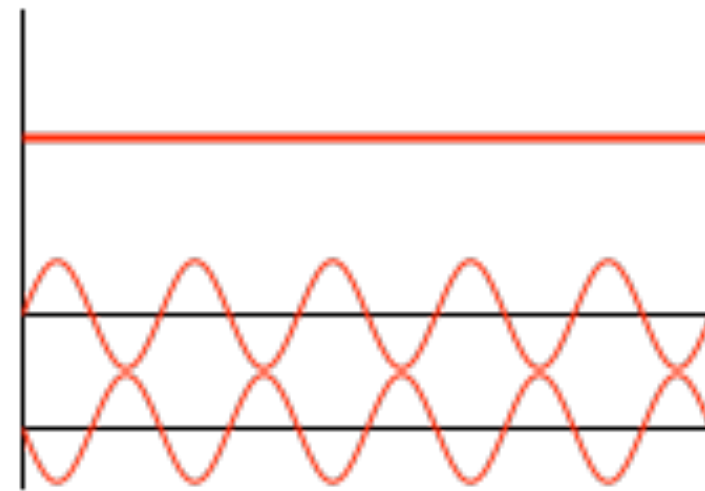
$$y = \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{2\pi} - \frac{t}{2\pi}\right)\right)$$



# 파동의 간섭

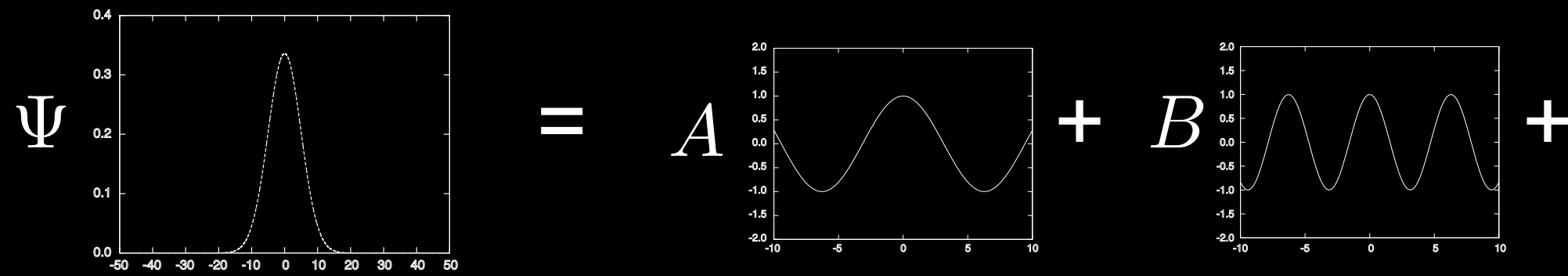


같은 위상

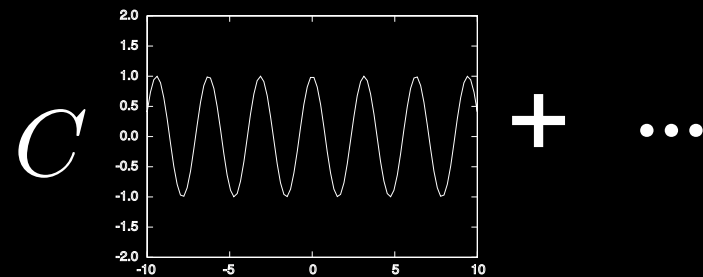


반대 위상

어떤 위치에 국소화된 파동함수도 잘 정해진 파장(혹은 파수)를 가지는 파동들의 합으로 표현할 수 있다.



위치 0 부근에 모여있는 파동함수



$A$   $k=0.5$  를 가지는 파동이  $\Psi$ 에서 차지하는 성분비

$B$   $k=1.0$  을 가지는 파동이  $\Psi$ 에서 차지하는 성분비

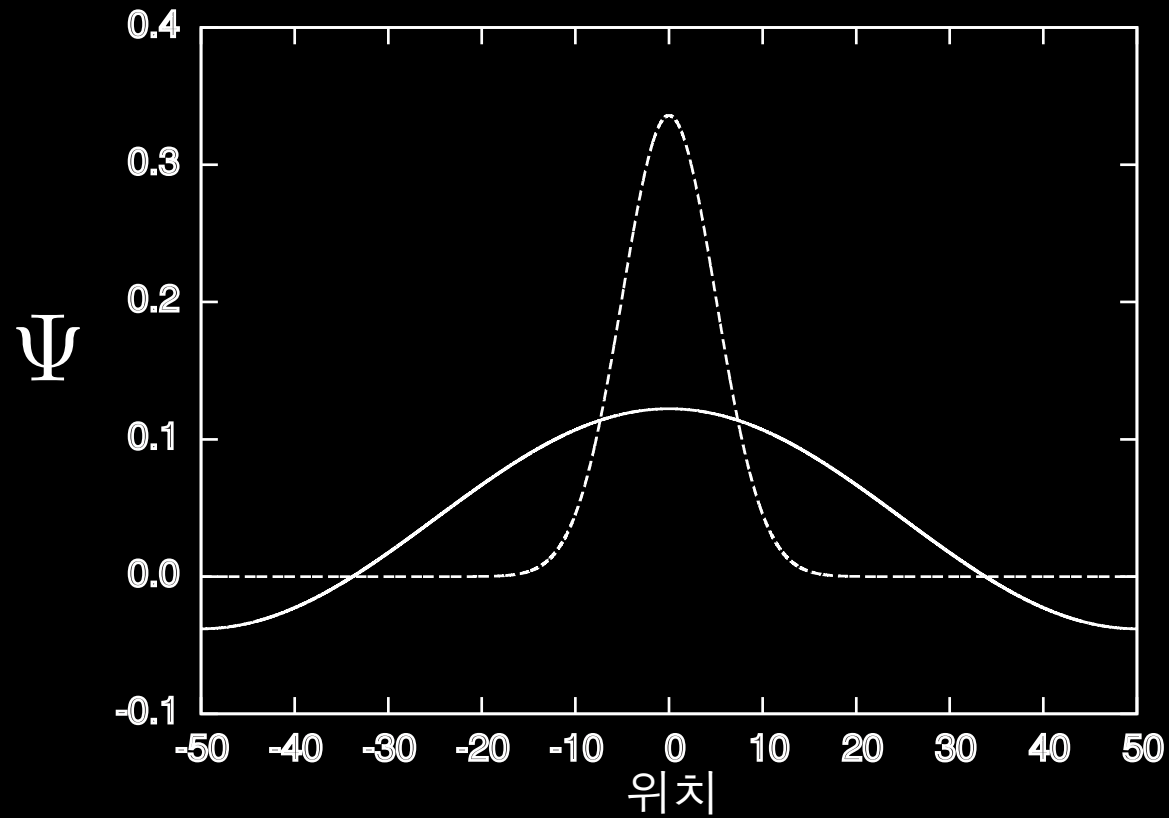
$C$   $k=2.0$  을 가지는 파동이  $\Psi$ 에서 차지하는 성분비

... ..

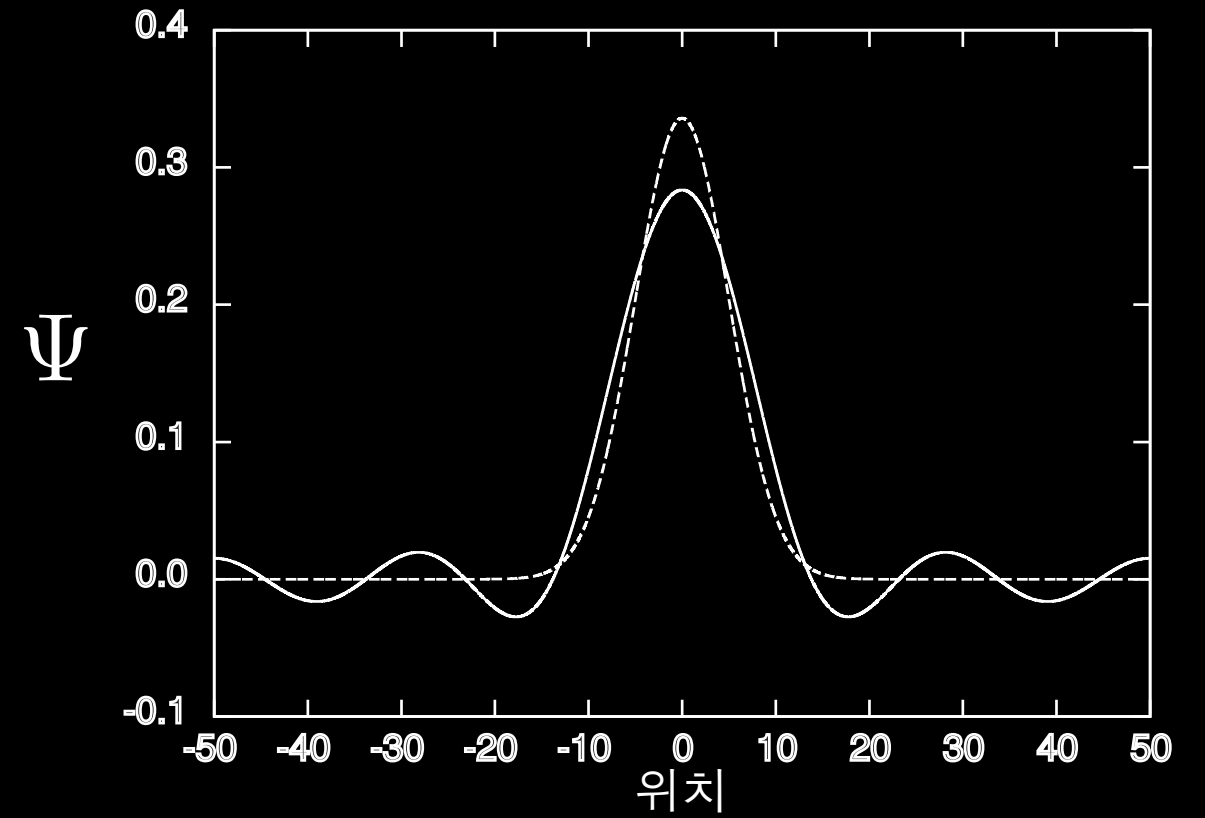
—————→  $\phi(k)$

각 구간의 파수에 해당하는 파동들을 합쳤을 때의 모습

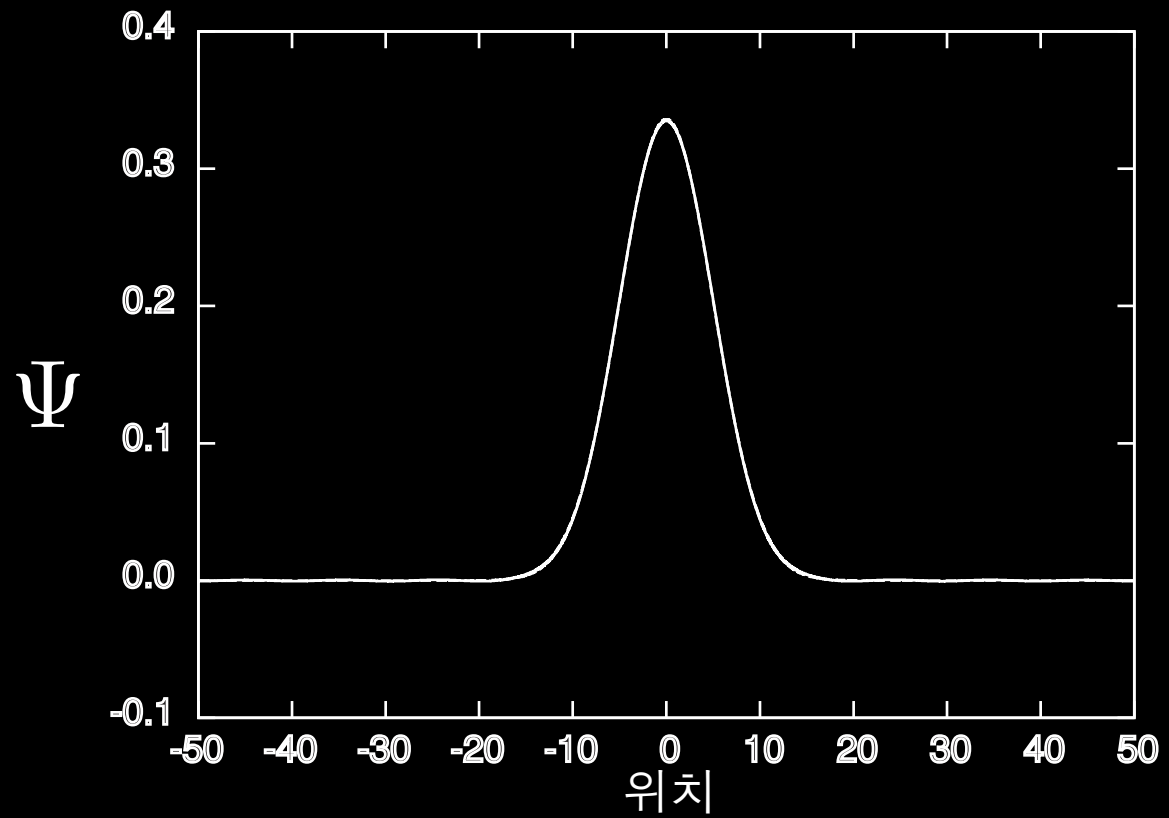
$$-\pi/50 \leq k \leq \pi/50$$



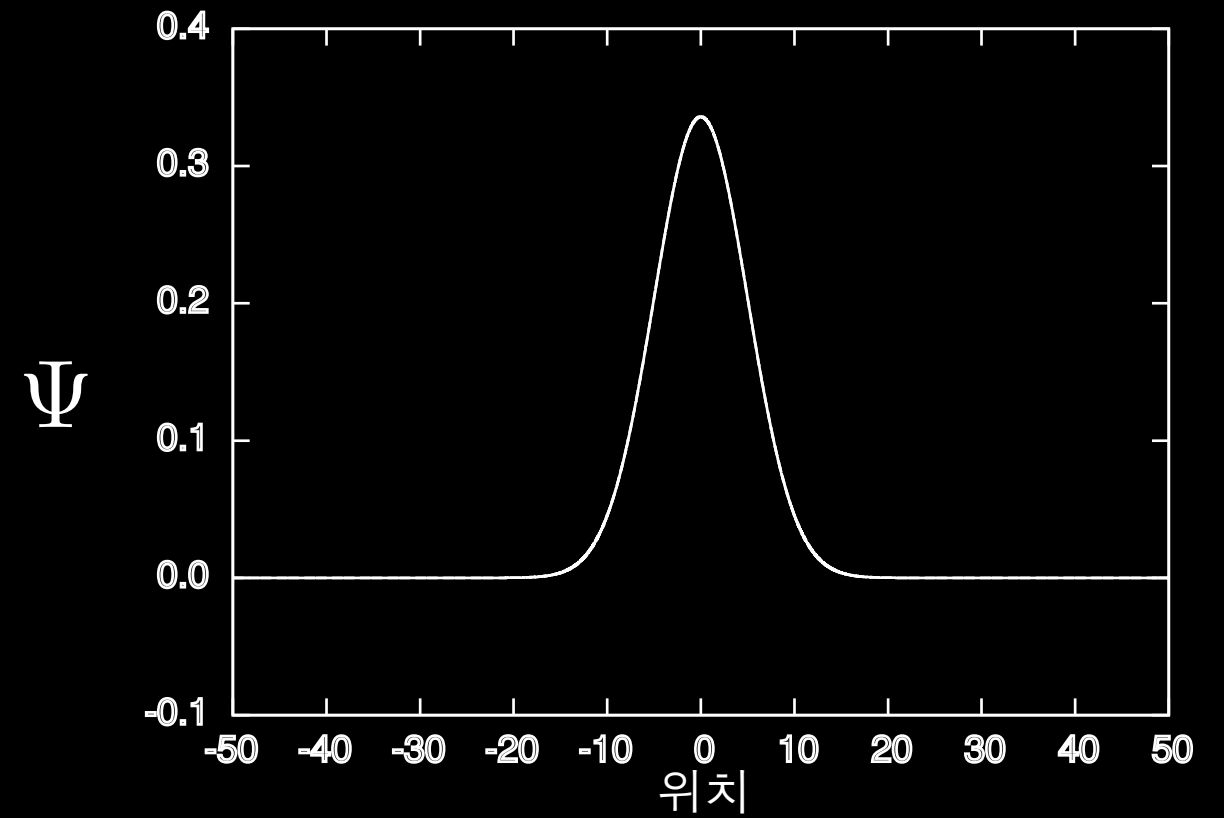
$$-\pi/10 \leq k \leq \pi/10$$



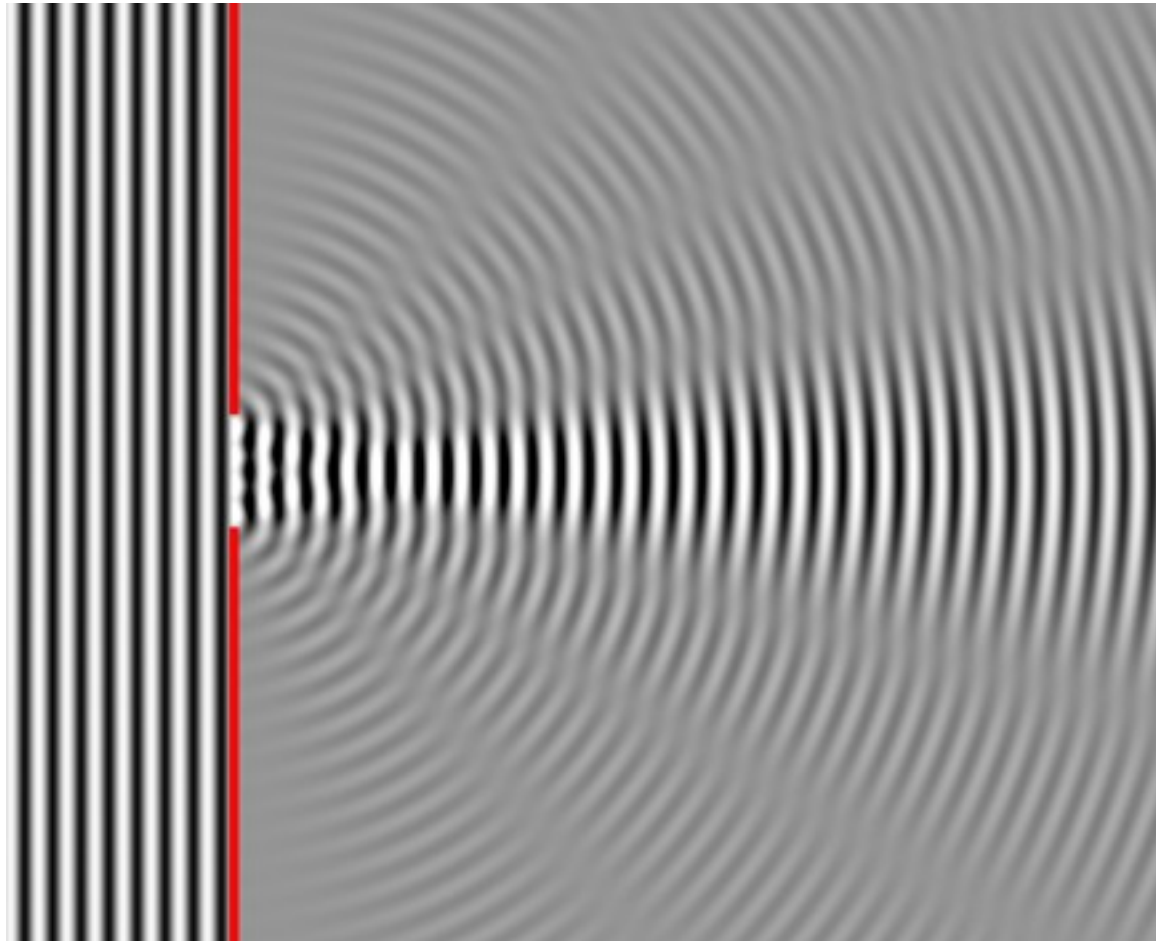
$$-\pi/5 \leq k \leq \pi/5$$



$$-3\pi/10 \leq k \leq 3\pi/10$$

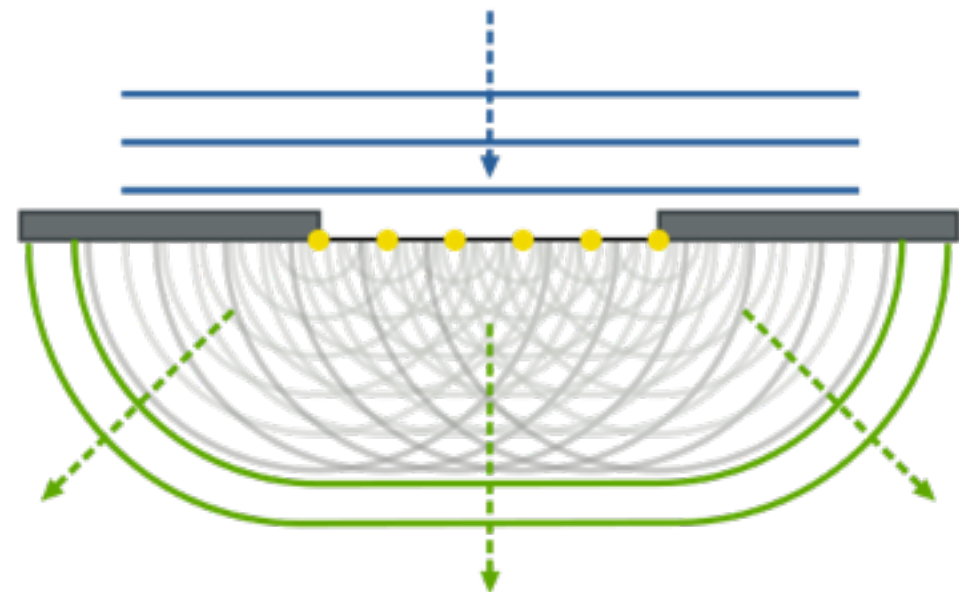
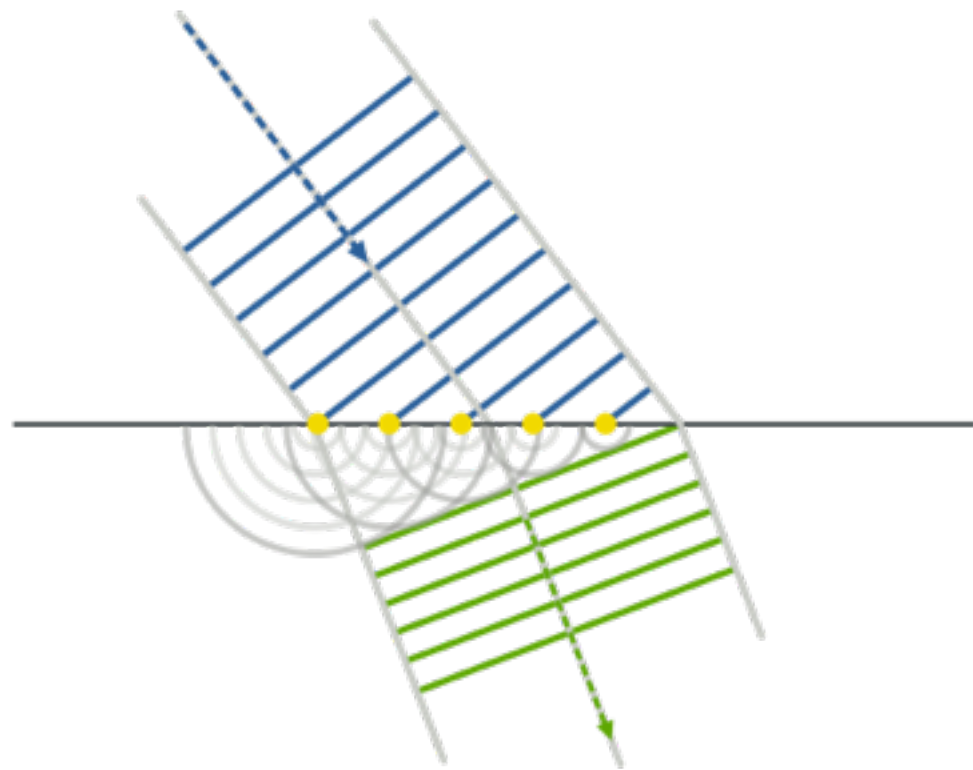


# 파동의 회절(diffraction)



# 호이겐스의 원리

Huygens-Fresnel 원리는 파동의 회절, 굴절등을 설명하는데 유용하다. 호이겐스의 원리에 따르면, 진행하는 파동앞엿선(wave front)상의 각점은 새로운 파원으로 간주되는데, 이것들로부터 구면파가 발생하며 이러한 구면파들의 중첩이 다음 파동앞엿선을 형성한다.





# 단일 슬릿

호이겐스의 원리에 의하면 점 P에서 관측되는 파동은 슬릿안의 모든 점에서 생겨난 구면파동들의 중첩이다. 슬릿의 어떤 점 x에서 생겨나서 점 P에서 관측되는 구면파동은 다음과 같다.

$$\psi_x(P, t) = A \frac{\sin[kr(x) - \omega t]}{r(x)}$$

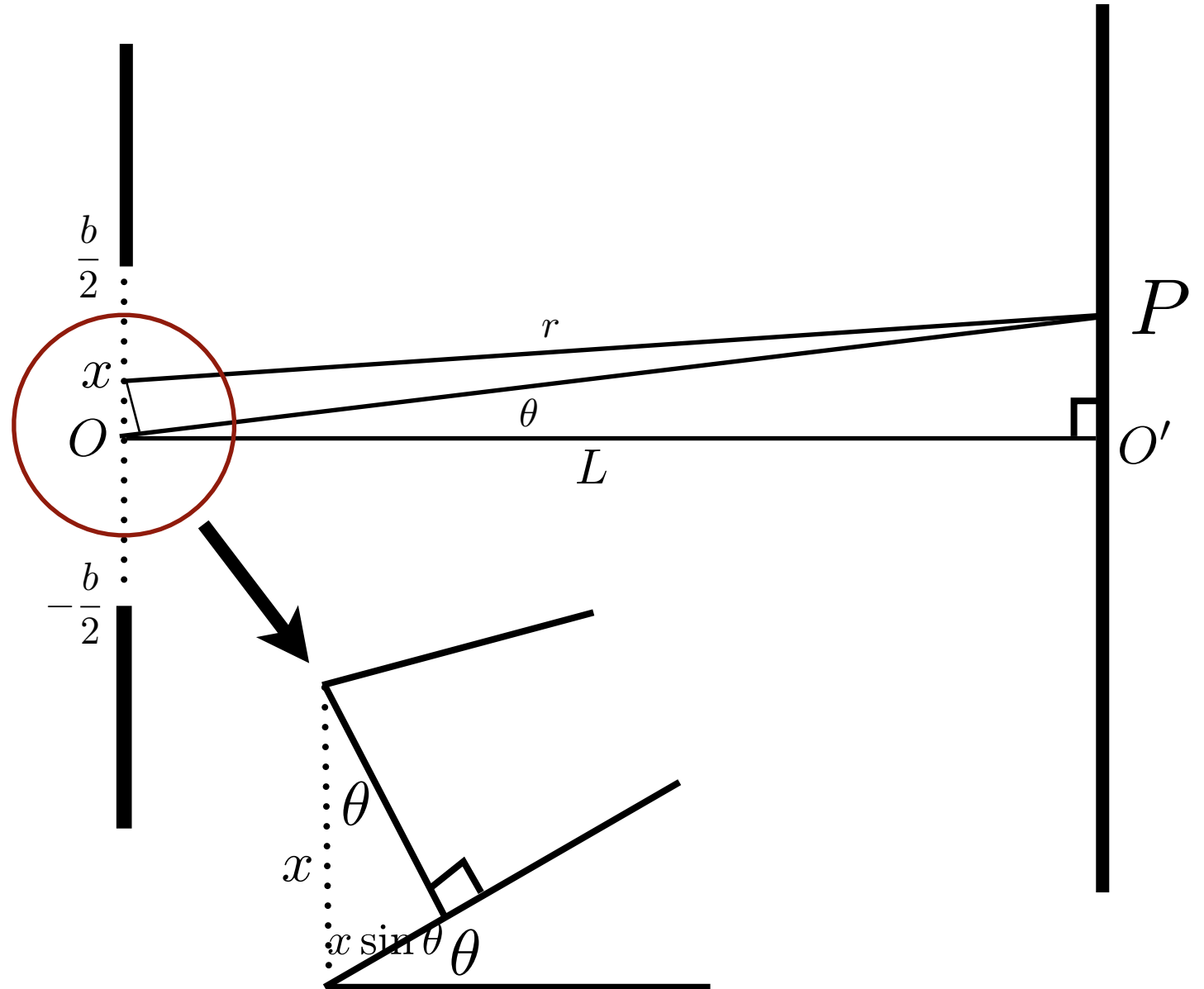
여기서  $r(x)$ 는 위치 x의 파원과 관측점 P 사이의 거리이다. 따라서 점 P에서 관측되는 파동은 다음과 같이 주어진다.

$$\psi(P, t) = \sum_{-\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}} \psi_x(P, t)$$

슬릿과 관측점 사이의 거리가 매우 멀고 각 POO'이 매우 작다면, 다음과 같은 근사가 성립한다.

$$\bar{OP} \sim L \quad \because \theta \ll 1$$

$$r(x) = \sqrt{(L - x \sin \theta)^2 + (x \cos \theta)^2} \sim (L - x \sin \theta) \quad \because L \gg b$$



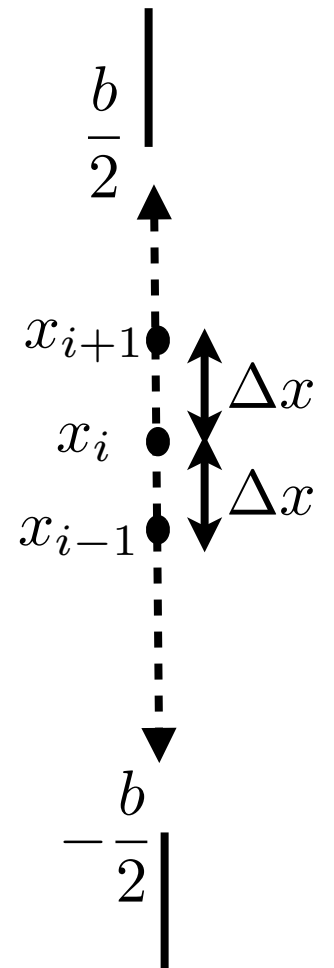
$$\therefore \psi_x(P, t) \sim A \frac{\sin[k(L - x \sin \theta) - \omega t]}{L - x \sin \theta} \sim A \frac{\sin[k(L - x \sin \theta) - \omega t]}{L}$$

L 보다 매우 작은 x에 대해서, 분모는 분자에 비해 매우 느리게 변하기 때문에 분모를 다시 한 번 근사하였다. 그런데 위치 변수 x는 연속 변수이므로, 합은 적분으로 대체된다.

$$\begin{aligned} \sum_x \psi_x(P, t) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A}{L \Delta x} \sum_{x_i} \sin[k(L - x_i \sin \theta) - \omega t] \Delta x \\ &= B \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sin(kL - kx \sin \theta - \omega t) dx \end{aligned}$$

여기서  $B = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A}{L \Delta x}$  이다. (B가 유한한 값이 되기 위해서는 A를 어떻게 정의해야 하겠는가?)

$$\begin{aligned} \therefore \psi(P, t) &= B \left[ \frac{\cos(kx \sin \theta - kL + \omega t)}{k \sin \theta} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \\ &= B \frac{\cos(\frac{kb \sin \theta}{2} - kL + \omega t) - \cos(-\frac{kb \sin \theta}{2} - kL + \omega t)}{k \sin \theta} \\ &= 2B \frac{\sin(kL - \omega t) \sin(\frac{kb \sin \theta}{2})}{k \sin \theta} \end{aligned}$$



한 주기  $T$  동안의 시간에 대한 제곱 평균을 구해보면, ( $T = \frac{2\pi}{\omega}$ )

$$4B^2 \frac{\sin^2(\frac{kb \sin \theta}{2})}{(k \sin \theta)^2} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(kL - \omega t) dt = C \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

$$\beta = \frac{kb \sin \theta}{2}, \quad C = \frac{B^2 b^2}{2}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(kL - \omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2kL - 2\omega t)}{2} dt = \frac{1}{2}$$

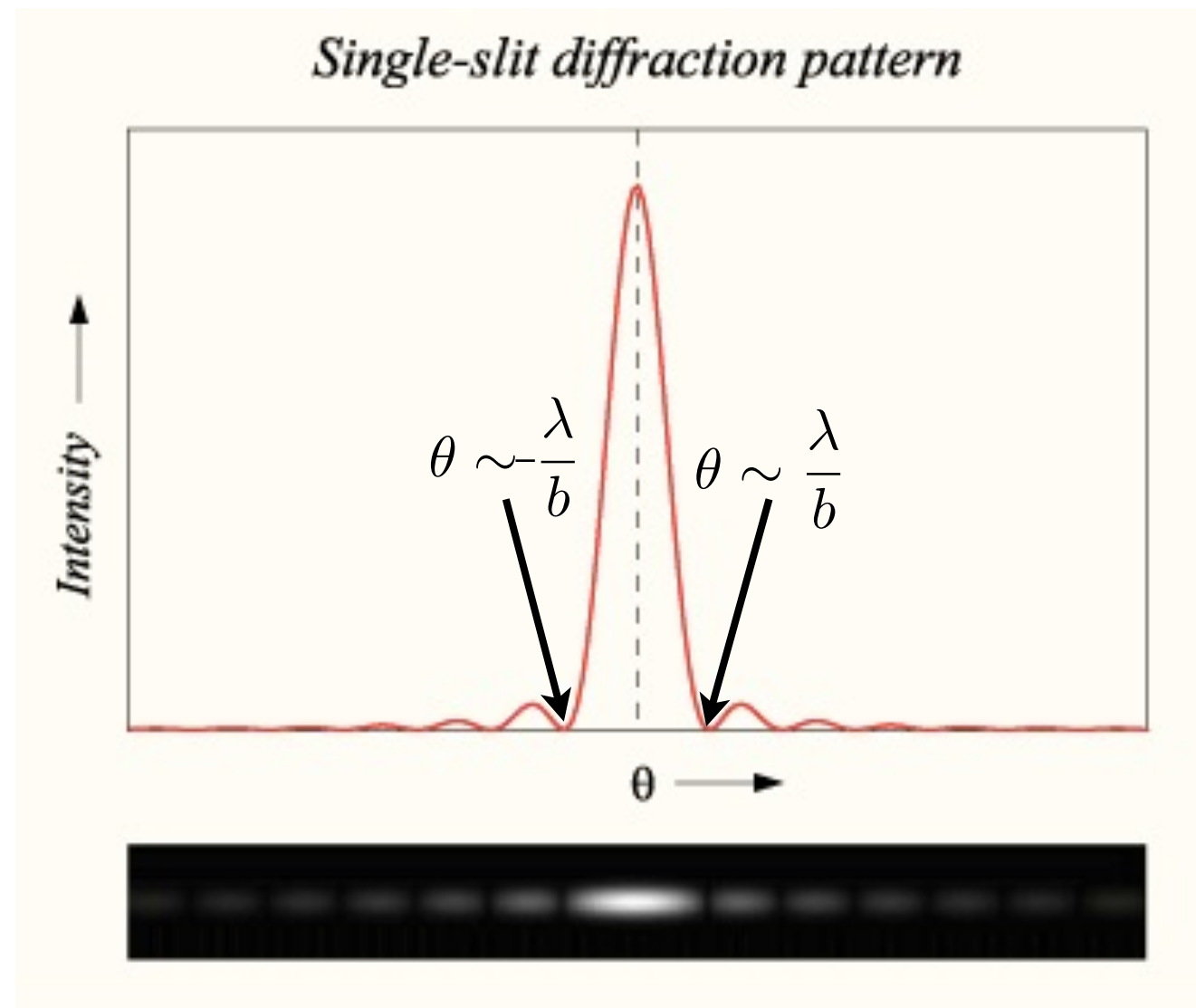
따라서  $\sin \beta = 0$  일 때마다 상쇄간섭이 나타나며, 첫 소멸점은  $\beta = \pi$  일때 나타난다. 이것은 다음 관계식을 준다.

$$\beta = \frac{kb}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta = \pi$$

$$\therefore \lambda = b \sin \theta \sim b\theta \qquad \theta \sim \frac{\lambda}{b} \quad (\theta \ll 1)$$

$\beta \rightarrow 0$  일 때는 상쇄간섭이 아님을 주의한다. (삼각함수의 극한 참조)

앞에서 얻은 식을 그래프로 그려보면 다음과 같다.



# 이중 슬릿(slit) 사고 실험 (Gedankenexperiment)

알갱이 (입자, particle)

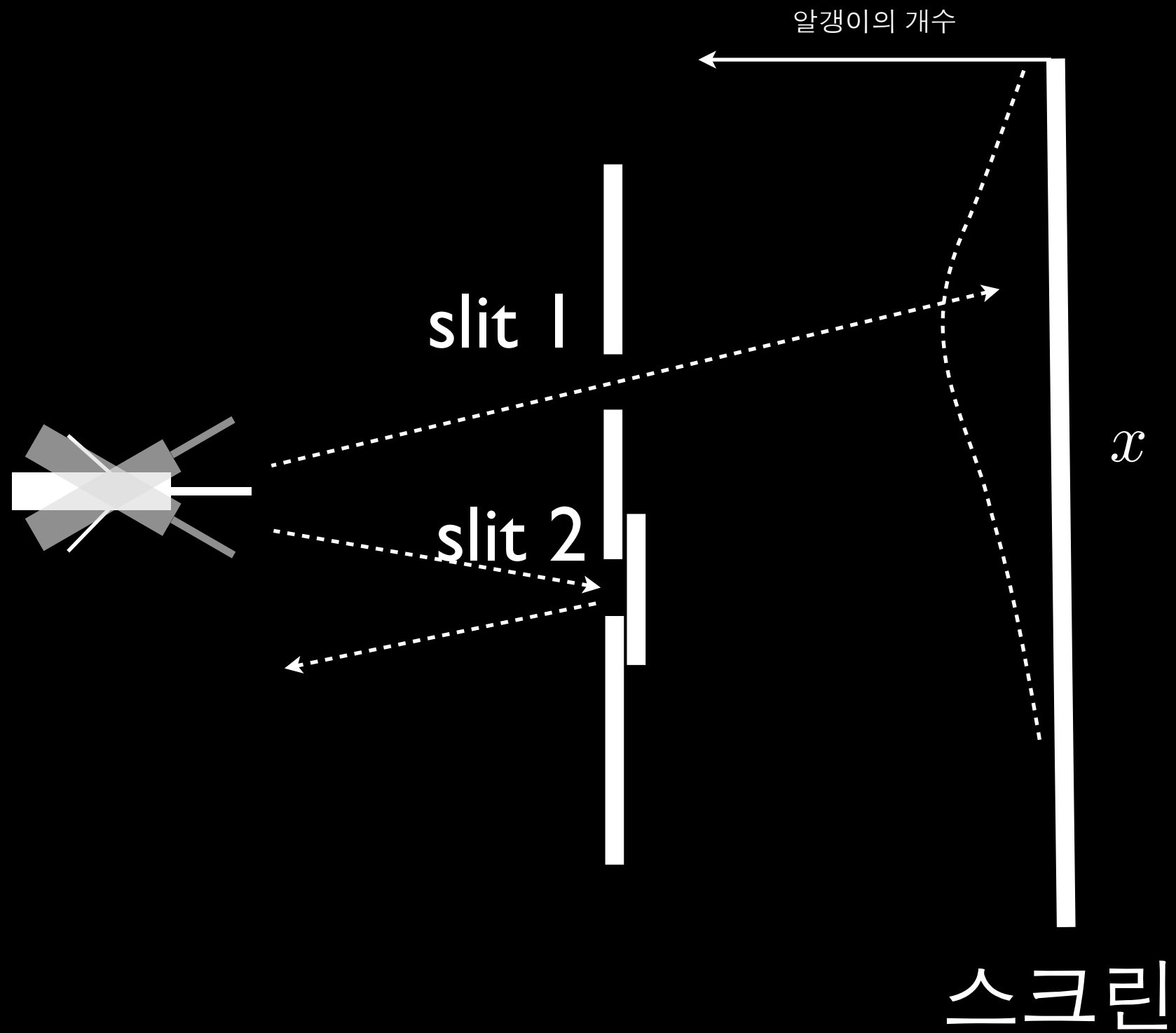
스크린 상의 어떤 위치  $\mathcal{X}$  에 도착한 알갱이의 개수를 센다.

굉장히 많은 수의 알갱이를 가지고 실험을 한다면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\text{스크린 상의 위치 } \mathcal{X} \text{에서 알갱이가 발견될 확률} = \frac{\text{스크린 상의 위치 } \mathcal{X} \text{에 도착한 알갱이의 수}}{\text{스크린에 도착한 전체 알갱이의 수}}$$

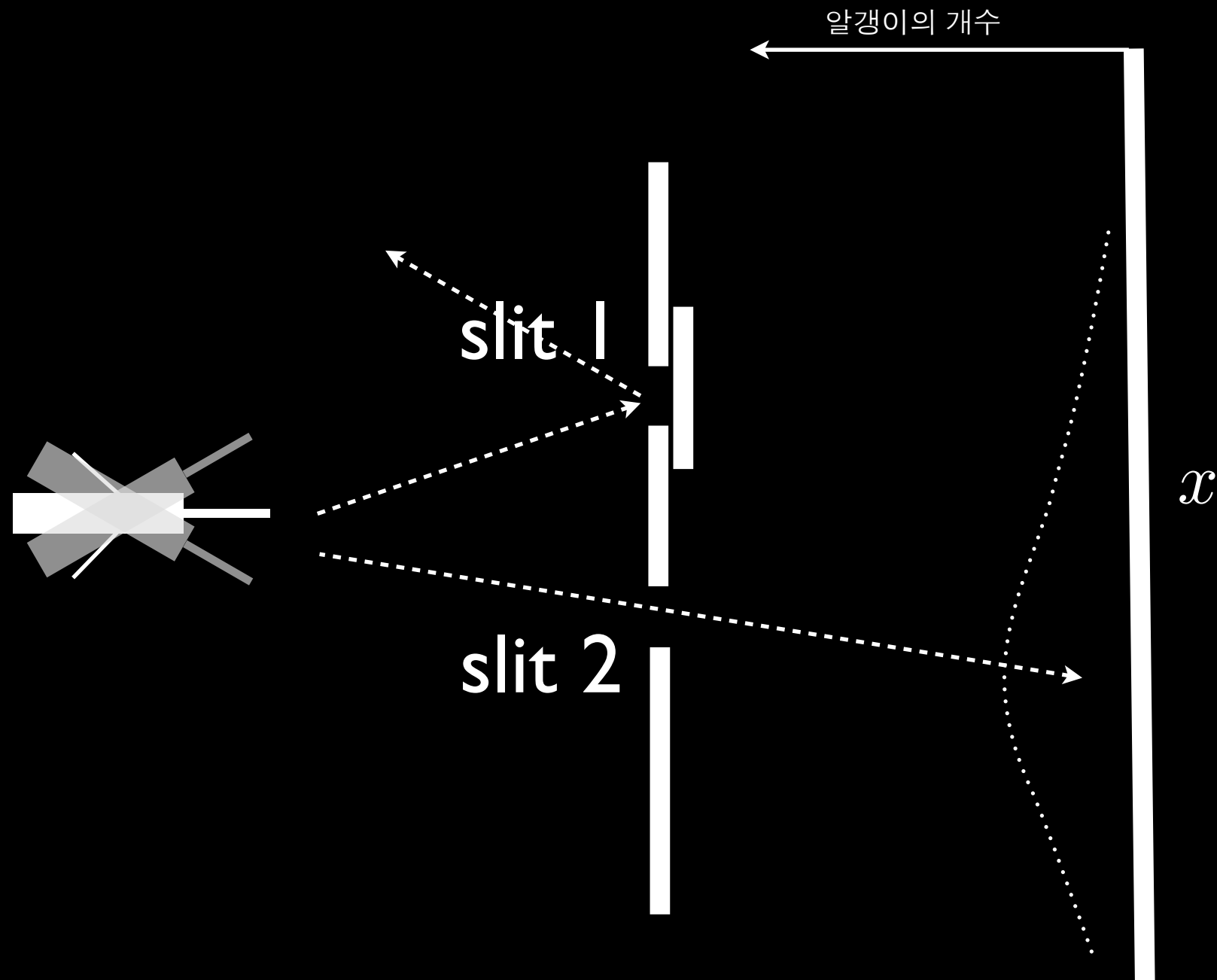
(참고-위치는 연속 변수이므로 정확하게는 확률밀도를 다뤄야 한다)

슬릿 1을 통과한 알갱이가 위치  $x$ 에서 발견될 확률:  $P_1(x)$

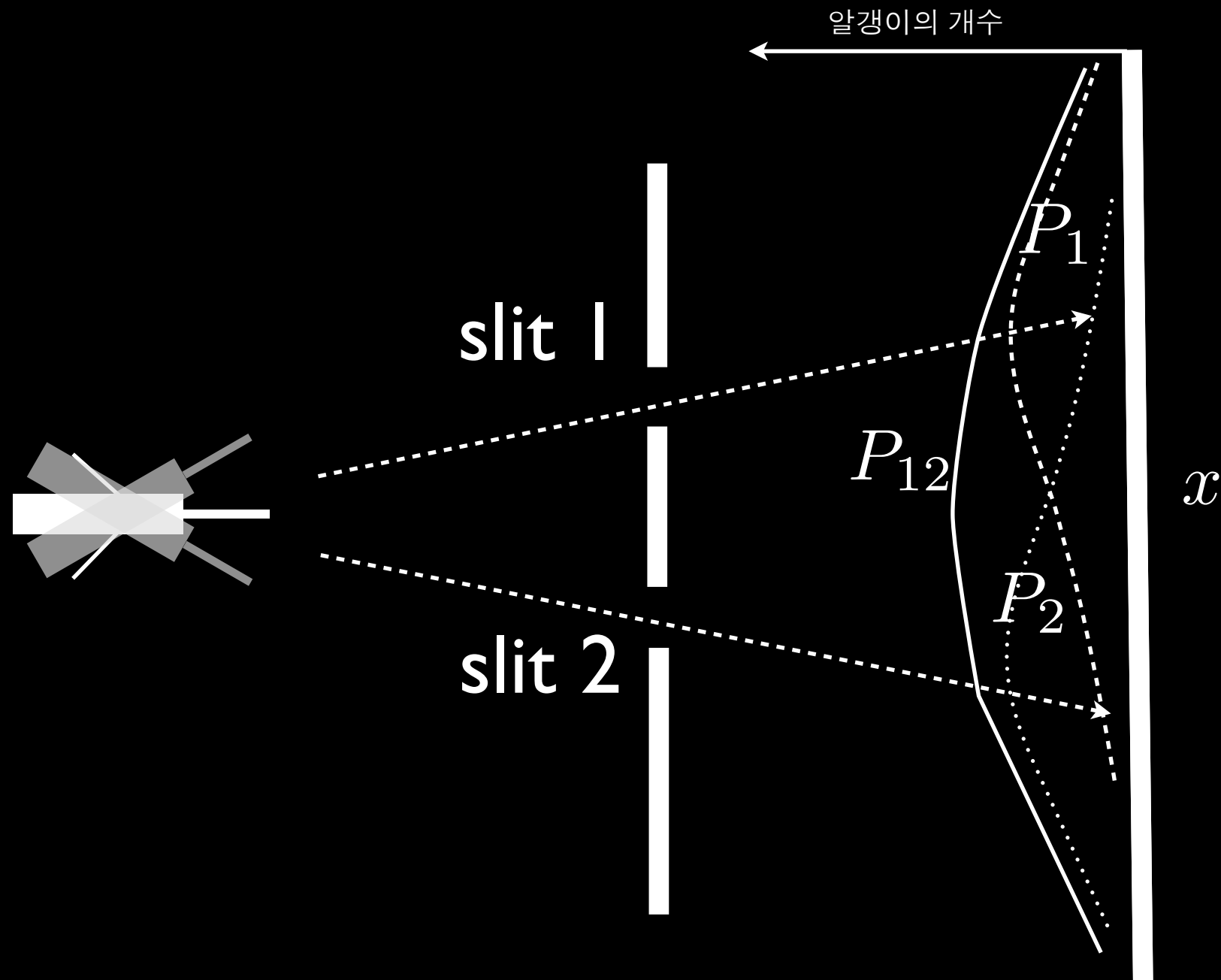




슬릿 2을 통과한 알갱이가 위치  $x$ 에서 발견될 확률:  $P_2(x)$



슬릿 1 혹은 슬릿 2를 통과한 알갱이가 위치  $x$ 에서 발견될 확률:  $P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x)$



파동(wave)

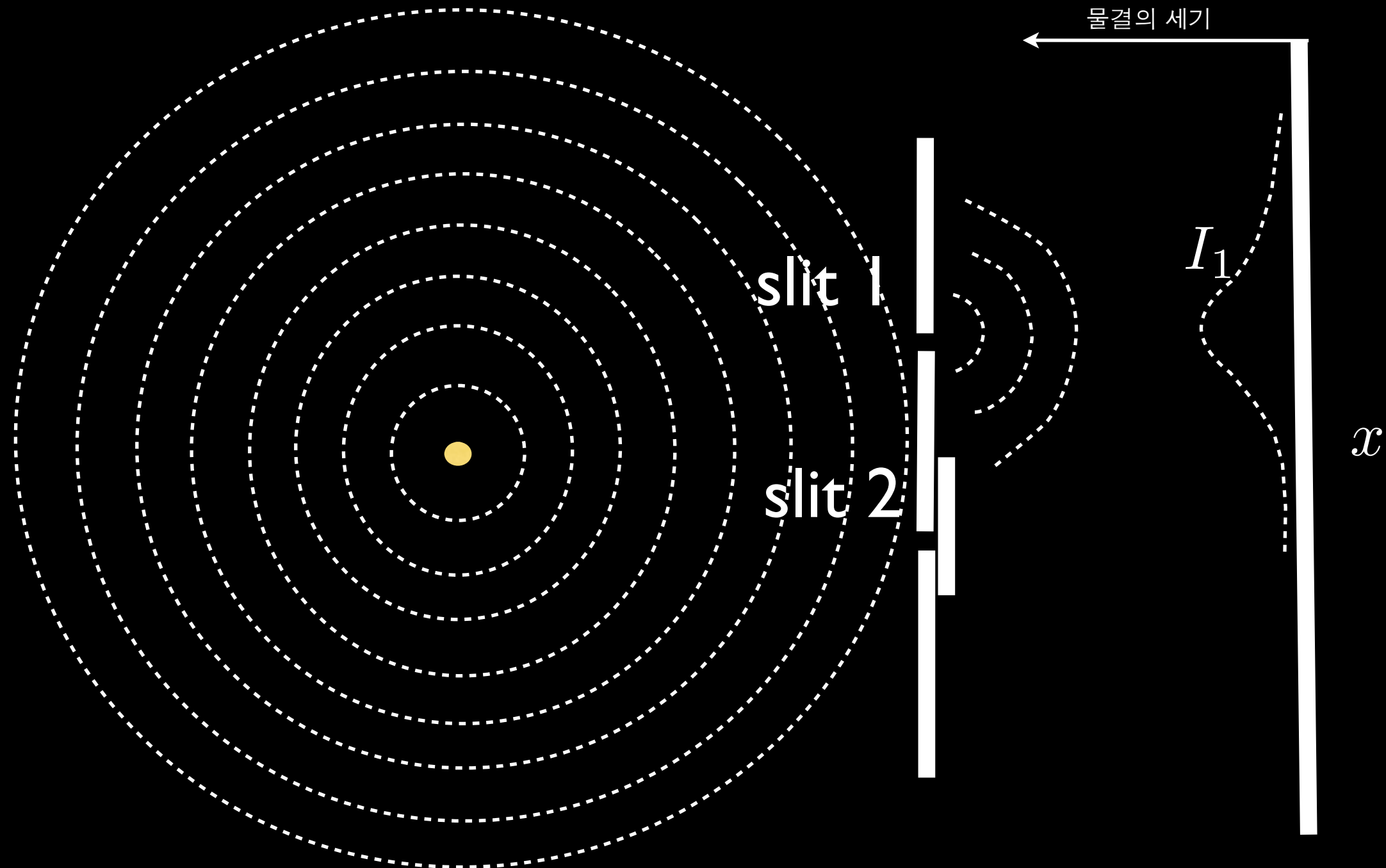


물결의 이중 슬릿에 의한 간섭

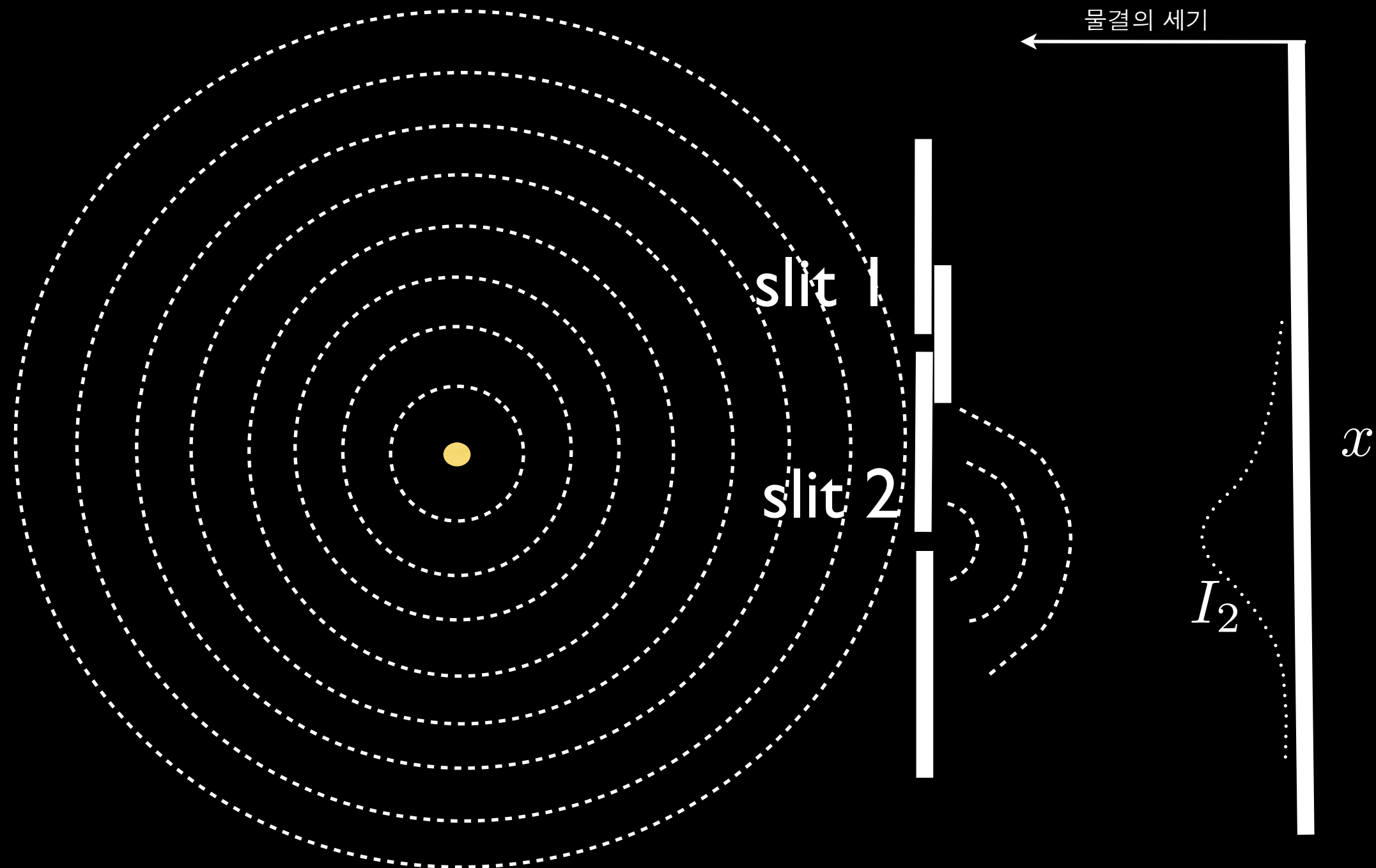
스크린 상의 위치  $\mathcal{X}$ 에서 물결의 높이를 잰다.

물결의 높이의 제곱을 시간에 대해 평균하여 이것을 물결의 그 위치에서의 세기  $I$  라 하자.

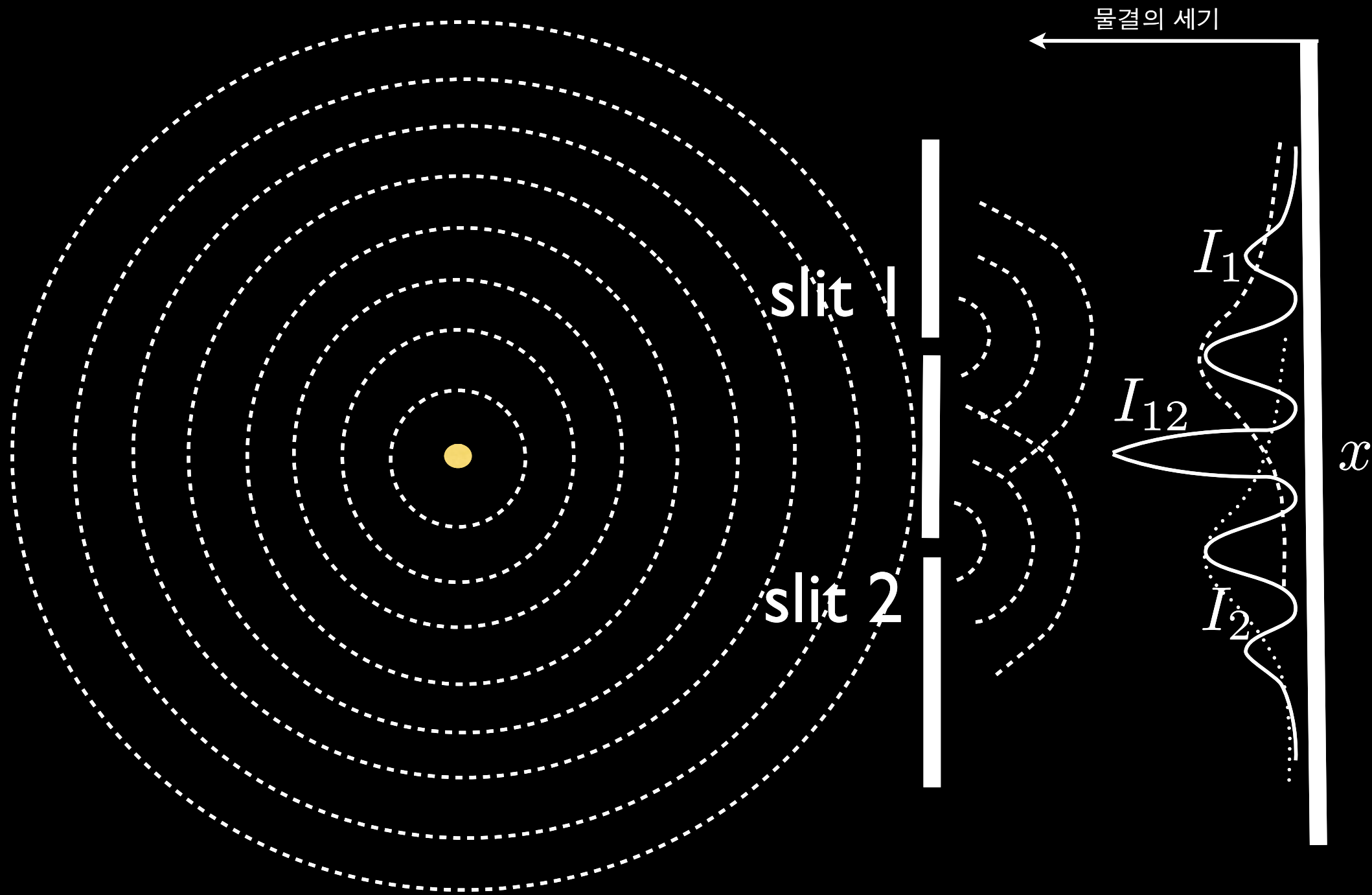
슬릿 1을 통과한 물결의 위치  $x$ 에서의 세기:  $I_1(x)$



슬릿 2을 통과한 물결의 위치  $x$ 에서의 세기:  $I_2(x)$



슬릿 1과 슬릿 2를 통과한 물결의 위치  $x$ 에서의 세기:  $I_{12}(x) \neq I_1(x) + I_2(x)$



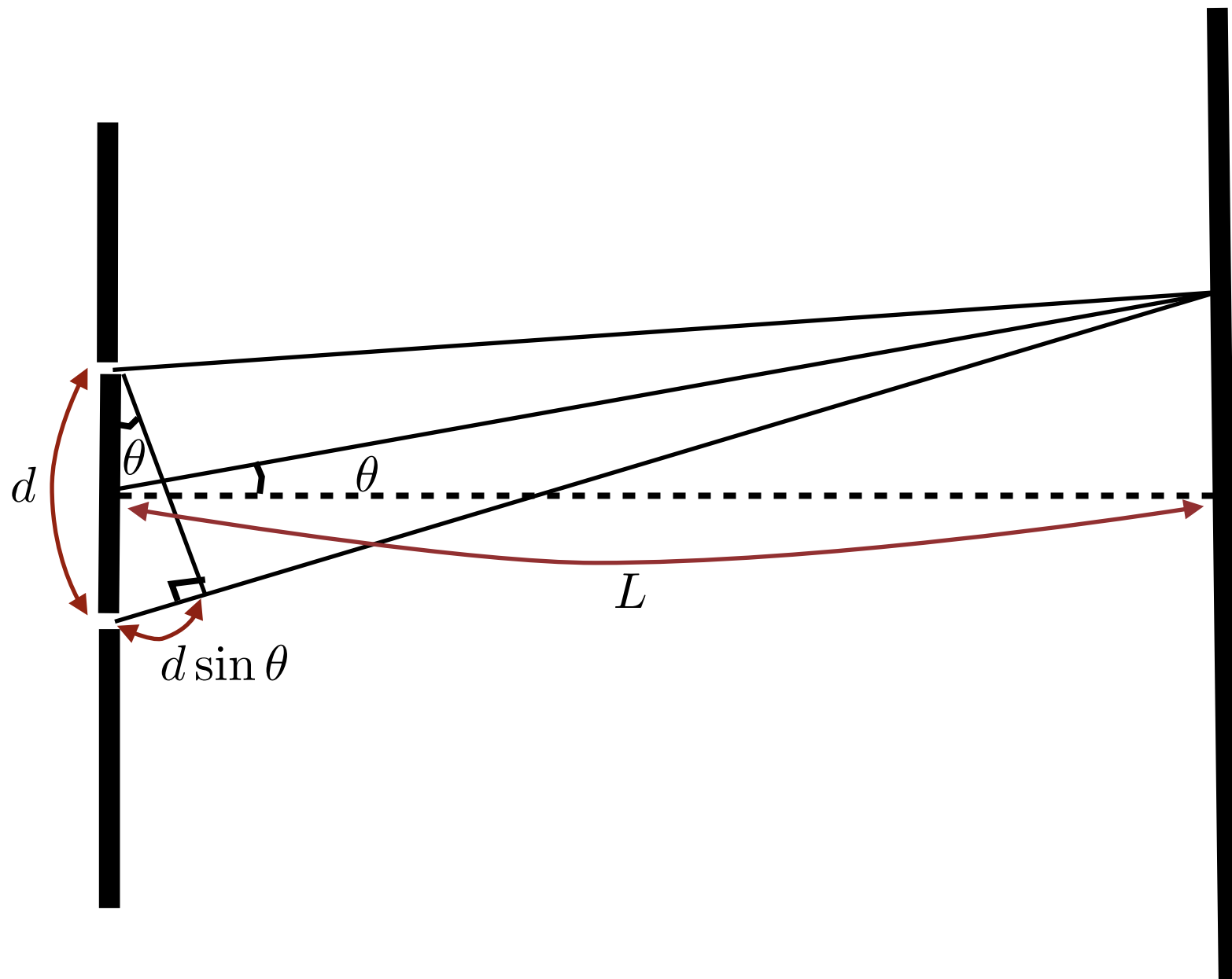
# 이중슬릿의 간섭

$\lambda \gg b$  슬릿의 폭이 파장에 비해 매우 작을 때는 슬릿을 통과한 파동을 완전한 구면파로 생각해도 됨

$d \sin \theta = m\lambda$  ( $m$ 은 정수): 경로차이가 파장의 정수배일 때 보강간섭 (파동의 마루끼리, 골끼리 만남)

$d \sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda$  ( $m$ 은 정수): 상쇄간섭 (파동의 마루와 골이 만남)

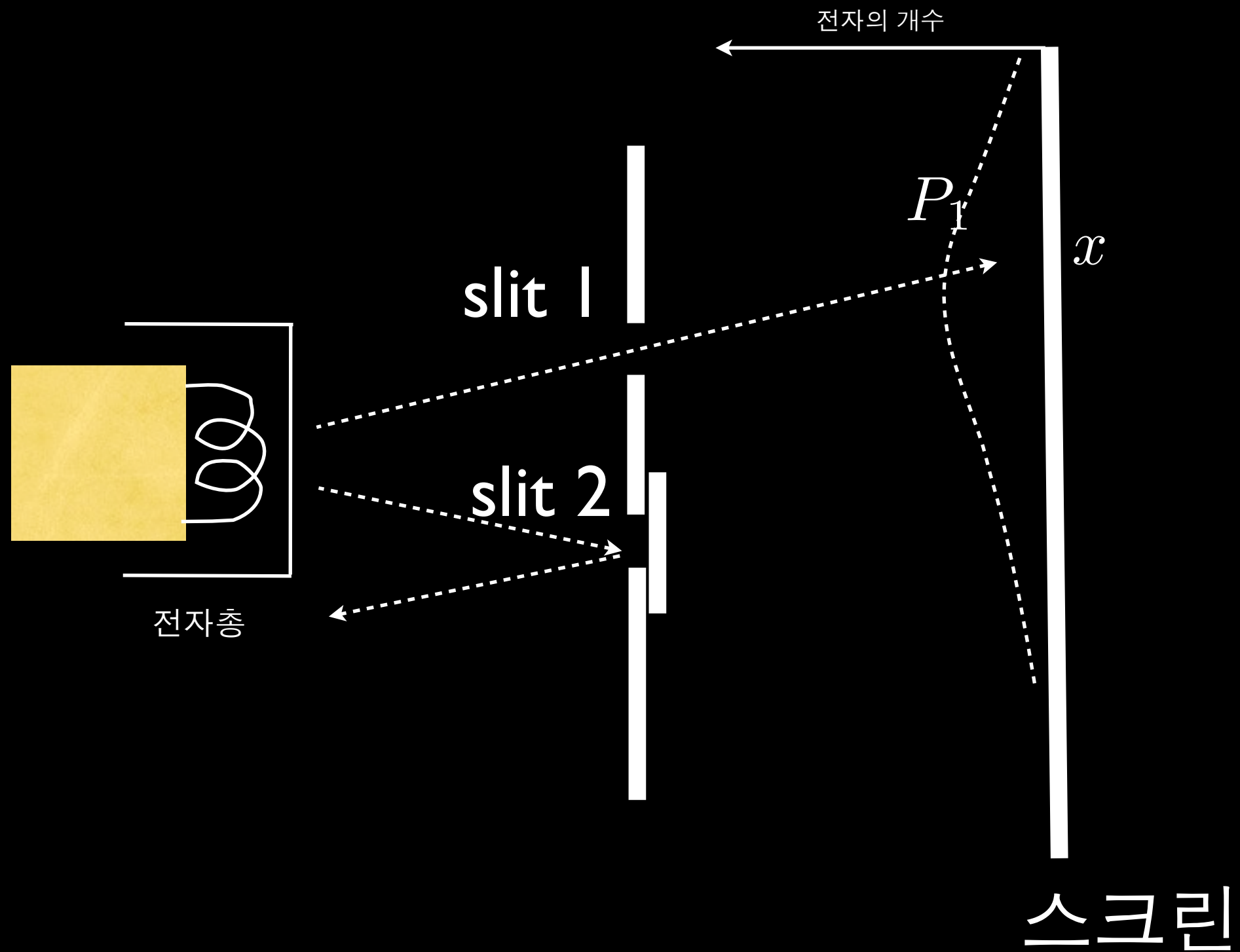
(각 슬릿에서 나온 두개의 구면파를 더해보면 알 수 있음 - 단일 슬릿 유도과정 참조)



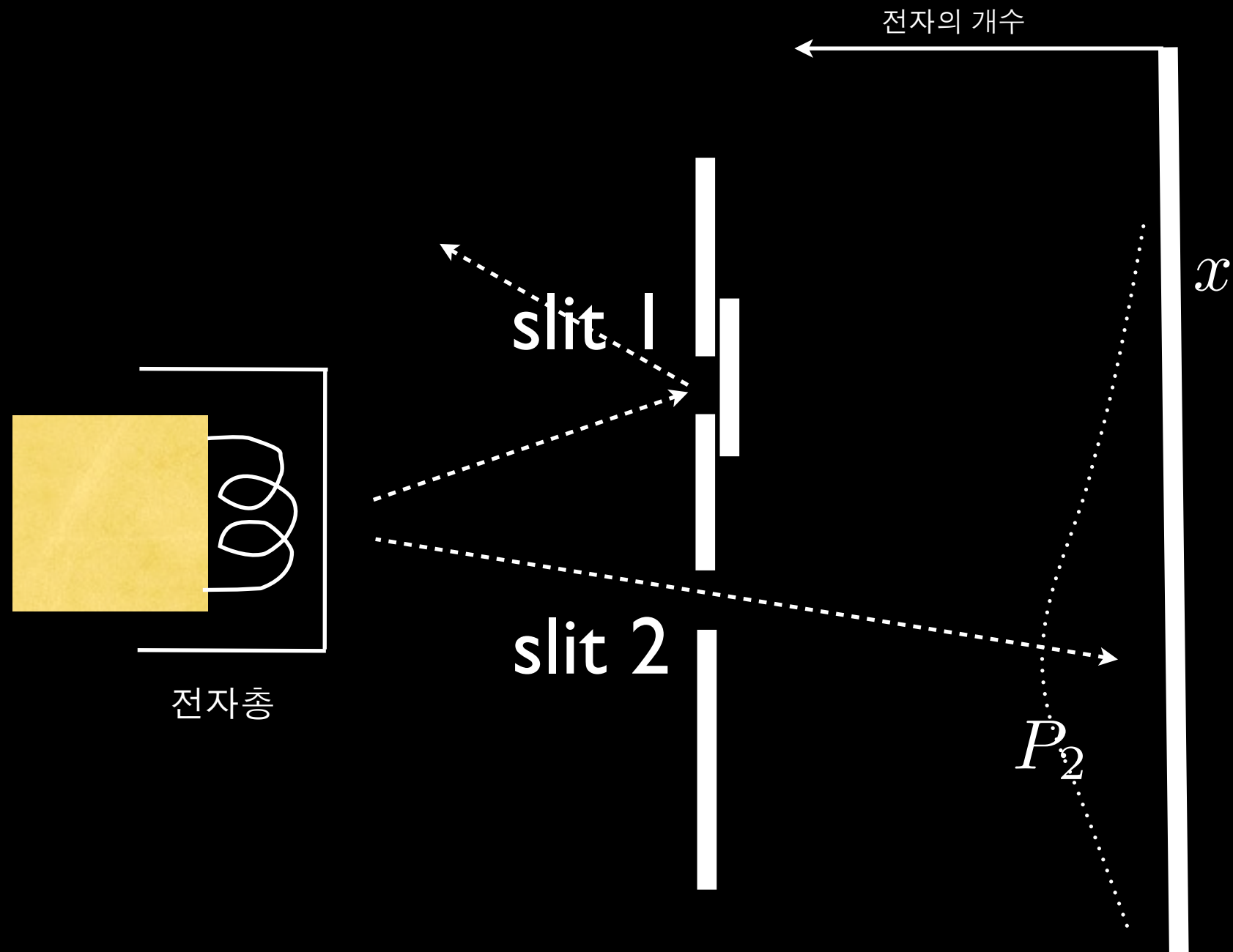


전자(electron)

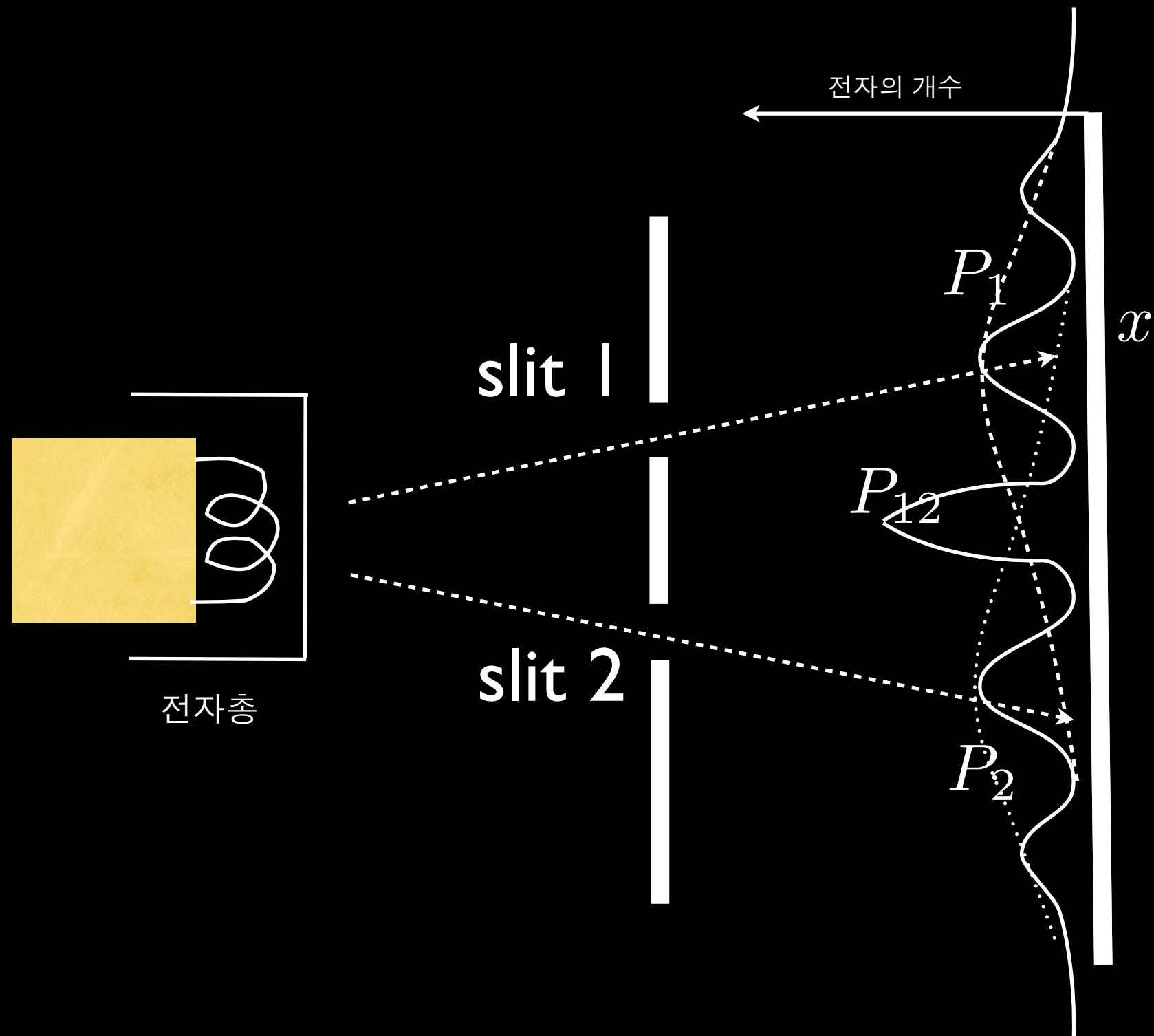
슬릿 1을 통과한 전자가 위치  $x$ 에서 발견될 확률:  $P_1(x)$



슬릿 2를 통과한 전자가 위치  $x$ 에서 발견될 확률:  $P_2(x)$



슬릿 1,2를 통과한 전자가 위치  $x$ 에서 발견될 확률:  $P_{12} \neq P_1 + P_2$



확률 분포에 나타나는 간섭을 어떻게 다룰 것인가?

확률 진폭(probability amplitude)의 개념을 도입

$$\text{확률} = |\text{확률 진폭}|^2$$

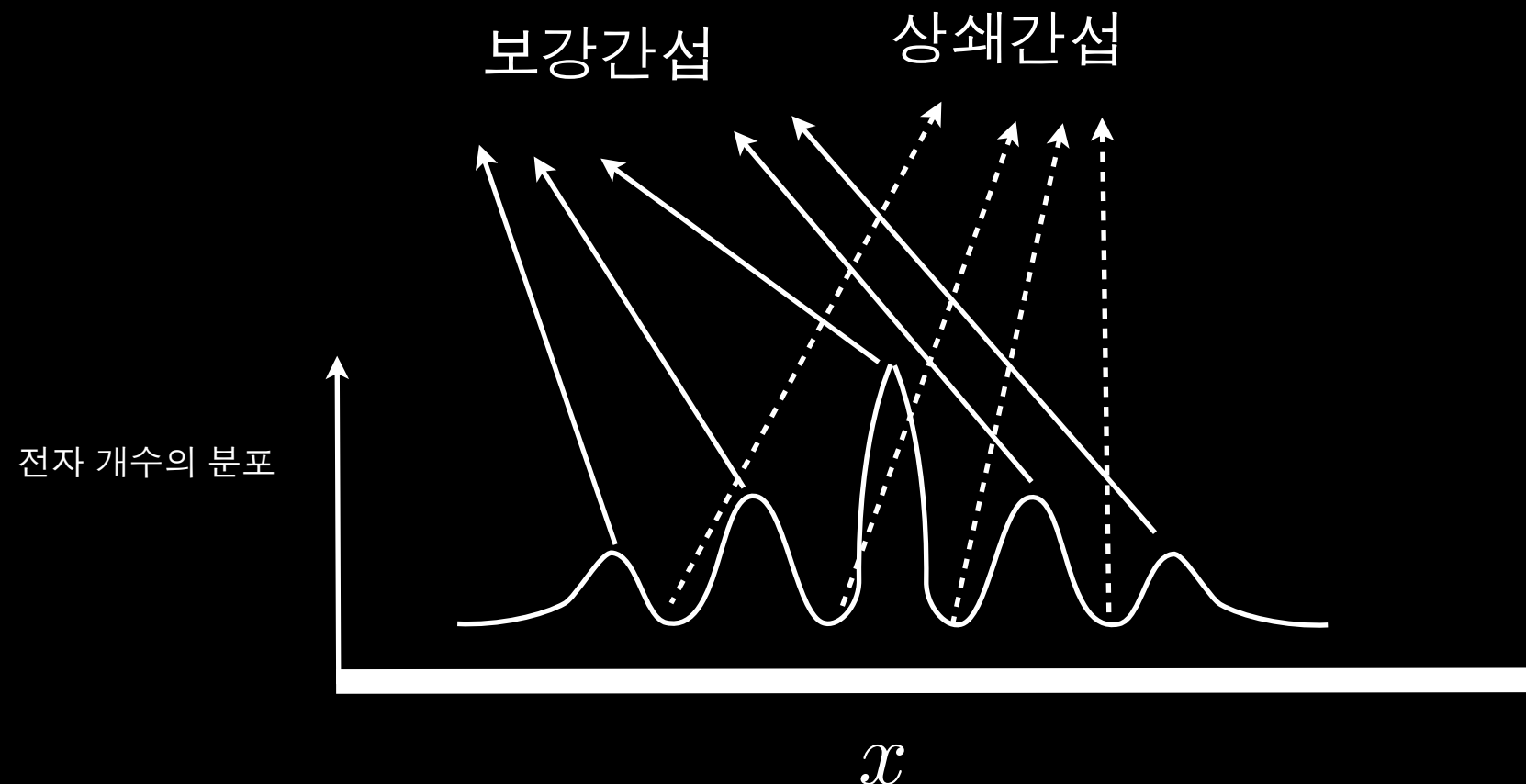
$$\psi_{12} = \psi_1 + \psi_2 \quad (\text{확률 진폭의 중첩})$$

$$P_1 = |\psi_1|^2$$

$$P_2 = |\psi_2|^2$$

$$P_{12} = |\psi_{12}|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2$$

# 간섭 (interference)



$$A \geq 0, B \geq 0$$

같은 위상: 보강간섭

반대 위상: 상쇄간섭

$$|A + B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2|A||B| \quad |A - B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B|$$

일반적인 위상차이로 말미암은 간섭을 다루려면 복소수의 개념이 필요하다.

$$\begin{aligned} P_{12} &= |\psi_{12}|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \text{간섭항} \\ &= P_1 + P_2 + 2\text{Re}(\psi_1^* \psi_2) \end{aligned}$$

고전 물리학의 알갱이: 간섭항 = 0

# De Broglie의 물질파

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$h = 6.6261 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$$



# 물리학의 기본 상수들

$c$  빛의 속도

$h$  플랑크 상수

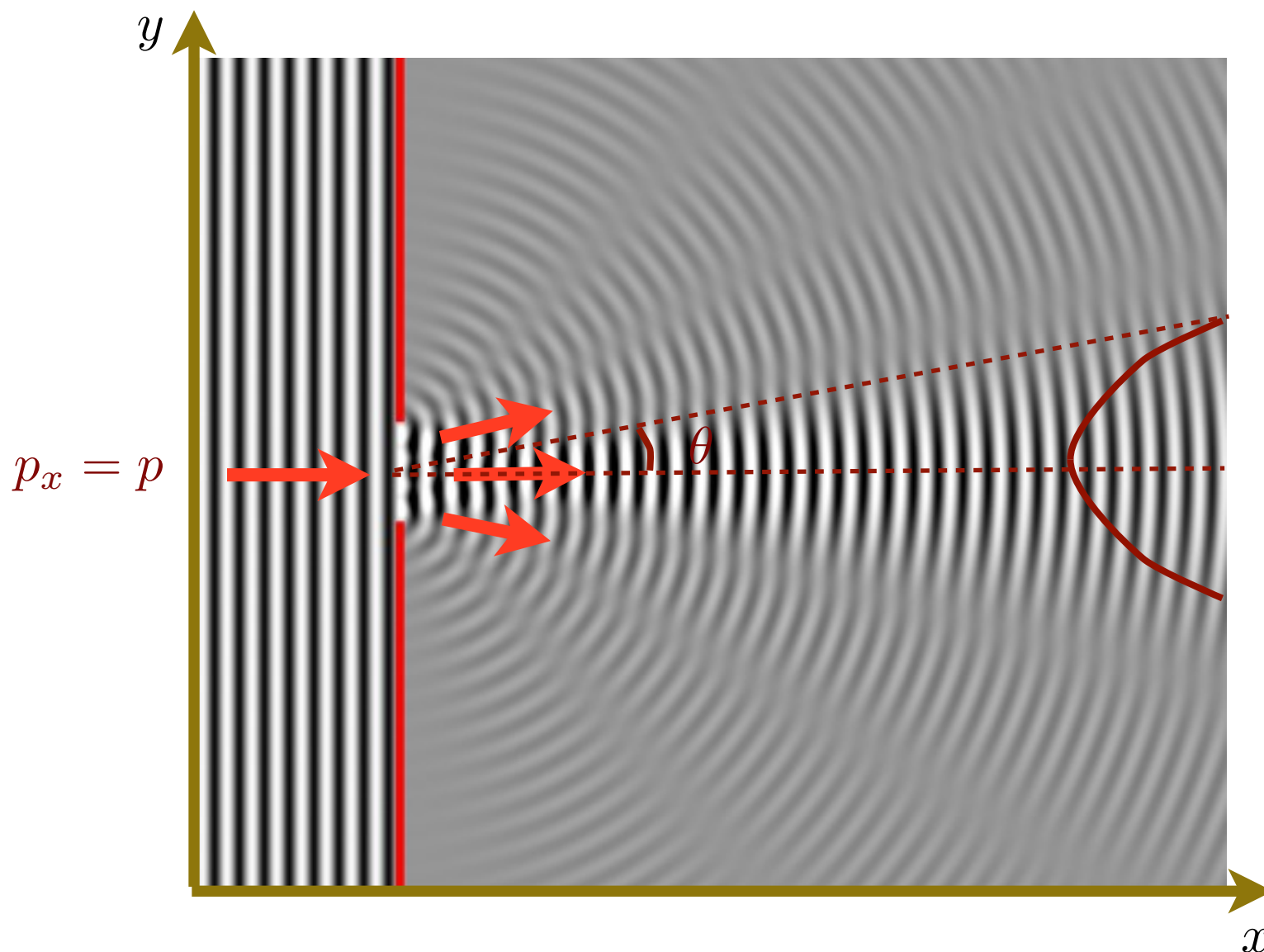
$G$  중력 상수

# Heisenberg의 불확정성 원리

전자의 물질파동이 x 축에 평행한 평면파로 단일 슬릿을 향해 입사한다고 해보자. 즉 y 방향의 운동량은 0이다.

$$p_y = 0, \Delta p_y = 0$$

따라서 슬릿을 통과하기 전엔 y 방향의 운동량 불확정성은 없다. 그렇다면, 불확정성 원리에 의하여 전자가 슬릿을 통과하기 전에는 y 축 상의 어떠한 위치에서도 전자가 발견될 확률은 같다. (최대의 위치 불확정성) 그러나 파동이 슬릿을 통과하는 순간 y 방향 위치의 불확정성은 슬릿의 폭인 b로 줄어들게 되는데, 이것 때문에 0이 아닌 y 방향 운동량의 불확정성이 생긴다.



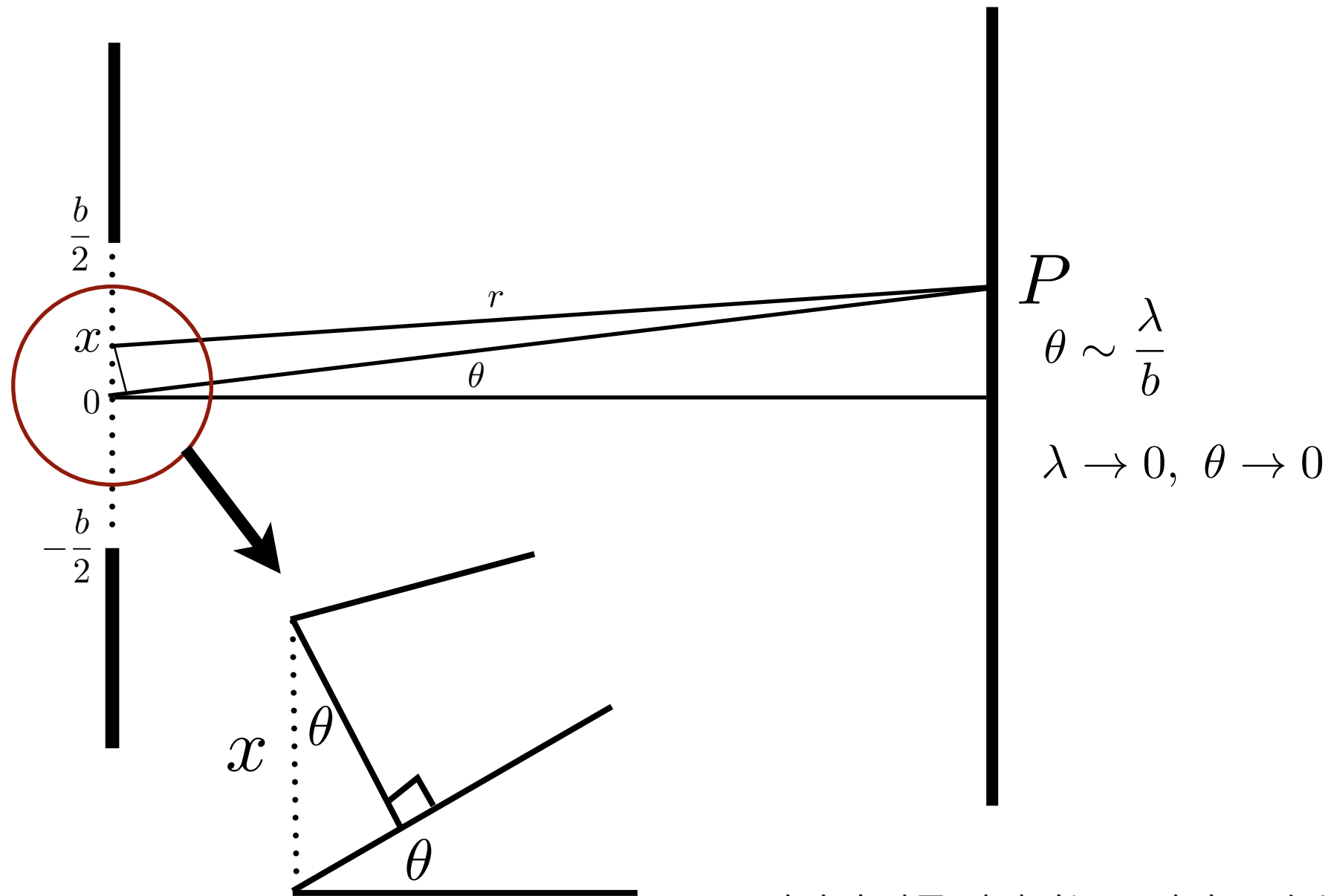
$$\Delta y = b$$

$$\Delta p_y = p \tan \theta \sim p \theta \sim \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{b} = \frac{h}{b}$$

$$\therefore \Delta y \Delta p_y \sim h$$

슬릿의 폭이 줄어들면 슬릿을 통과한 파동은 구면파에 가까워진다. 따라서 y 방향 운동량의 불확정성은 슬릿폭에 반비례한다. 위의 식에서 y 방향 운동량의 불확정성은 전자의 도착점이 정중앙에서 벗어난 정도를 이용하여 “대략적”으로 구하였다.

# 단일 슬릿-고전적 극한



파장이 아주 짧아지는 고전적 극한에선  $y$  방향 운동량의 불확정성은 무시할 수 있음을 알 수 있다.

# 자유전자 (free electron)

공간에 다른 것은 아무것도 없고 오로지 전자 하나만 있다면, 공간의 한 점에서 전자가 발견될 확률이 공간의 다른 점에서 전자가 발견될 확률과 다를 이유가 없다. 즉 이 전자가 발견될 확률은 공간의 모든 점에서 같아야 한다. 그런데 이것은 최대의 위치 불확정성을 의미하므로, 불확정성의 원리에 의하여 이러한 전자의 운동량은 정확하게 정해질 수 있다는 말과 같다.

$$\Delta p \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow \infty$$

이러한 전자를 자유전자라고 하는데, 이 자유전자의 확률진폭(파동함수)을 위의 조건과 전자가 가지는 운동량을 이용하여 다음과 같이 추측할 수 있다. 확률진폭의 절대값을 제공하면 위치  $x$  에서 전자가 발견될 확률밀도이므로, 전 공간에 대해 이 확률밀도함수를 다 더하면 1이 되어야 한다.

$$\int_V dx |\psi(x, t)|^2 = 1$$

$$\therefore |\psi(x, t)|^2 = \text{위치와 시간에 무관한 상수} = \frac{1}{V} \quad (V \text{는 공간 전체의 부피인데 여기에선 1차원 문제를 다루기 때문에 전체 구간의 길이로 하면 되겠다.})$$

또한 정확한 운동량  $p$ 를 알 수 있으므로 확률진폭의 파장은 드브로이 관계식에 의해 정확하게 정해진다.

$$\therefore \psi(x + \lambda, t) = \psi(x, t), \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

위의 성질들로부터 자유전자의 확률진폭을 다음과 같이 적을 수 있음을 알 수 있다. 물론 이 결과는 후에 더욱 엄밀하게 확인된다.

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\frac{p}{\hbar}x - \omega t)}, \quad V \rightarrow \infty$$